نظریه معادلات تفاضلی (دیفرانس)

و

ثبات پویای تعادل

دکتر بیژن بیدآباد

بِسْمِ اللّهِ الرَّحْمنِ الرَّحِیم

سُبْحانَکَ لا عِلْمَ لَنا اِلاّ ما عَلَّمْتَنا اِنَّکَ اَنْتَ الْعَلیمُ الْحَکیم

﴿منزهی تو ما را دانشی نیست جز آنچه تو به ما آموختی همانا توئی دانشمند حکیم﴾

قرآن کریم

آیه ۳۲ سوره بقره

بیدآباد، بیژن ۱۳۳۸ Bidabad, Bijan

نظریه معادلات تفاضلی (دیفرانس) و ثبات پویای تعادل / بیژن بیدآباد- ویرایش ۱- تهران:......،

۱۳۸۴، ده، ۱۶۹ ص.

ISBN: .... ریال

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرست نویسی پیش از انتشار)

کتابنامه

۱- معادلات تفاضلی. ۲- تعادل ۳- تحلیل پویا. الف نویسنده. ب عنوان.

....

۱۳۸۴ ....

نظریه معادلات تفاضلی (دیفرانس) و ثبات پویای تعادل

تألیف: دکتر بیژن بیدآباد

ناشر: ....

آدرس: ....

ایمیل: bijan_bidabad@msn.com

وب: http://www.geocities.com/bijan_bidabad/

تلفن: ....

نوبت چاپ: اوّل ۱۳۸۴

تعداد: ...... جلد

چاپ و صحافی: ....

بهاء: .... ریال

شابک: ....

ISBN............... :

فهرست مطالب

پیشگفتار

کاربرد الگوهای پویا در کلیه شاخه‌های علوم از رشد شدیدی برخوردار است و همواره بر اهمیّت آن افزوده می‌شود. نفوذ این بخش از تجزیه تحلیل‌ها در رشته‌های مختلف علوم پایه، مهندسی، اقتصادی، اجتماعی و انسانی بقدری وسیع گردیده است که حذف این رشته از ریاضی قدرت تحلیل نظریات مختلف را از بین می‌برد.

الگوهای پویا به طرُق مختلف فرموله می‌شوند. یکی از این طرُق بکارگیری معادلات تفاضلی می‌باشد. اینگونه معادلات به دلیل گسستگی ذاتی بعضی از متغیرهای خود ابزار خوبی را برای فرموله کردن مسائل پویا در حالت گسستگی زمان فراهم می‌نمایند. متغیر زمان می‌تواند به اشکال مختلف در الگوهای ریاضی بکار برده شود. اگر زمان را در مقاطع خاصی مدّ نظر قرار دهیم یک متغیر گسسته تعریف کرده‌ایم که این متغیر می‌تواند بخوبی توسط معادلات تفاضلی بکار گرفته شود.

هدف از نوشتن این کتاب آموزش معادلات تفاضلی برای دانشجویانی است که از این نظریه در مطالعات و تحقیقات خود استفاده می‌نمایند. در نوشتن این کتاب سعی بر این بوده است که از هر حیث به زبان ساده و با حداقل ریاضیات لازم مطالب بیان شود. گرچه در طی فصول کتاب، مسائل بتدریج مشکل‌تر شده و ریاضیات مورد نیاز آن نیز بیشتر می‌گردد ولی تا حدّ امکان تلاش شده که خواننده بدون مراجعه به کتب کمکی بتواند مطالب را دنبال نماید. بعضی از قسمت‌های مشکل‌تر را می‌توان در مرورهای اولیه حذف نمود و مجدداً بعد از مطالعه سایر قسمت‌ها به آن بازگشت.

ارائه مثال‌های مختلف عددی یکی دیگر از ویژگی‌های این کتاب می‌باشد که درک مطلب را در مباحث مختلف بیشتر می‌نماید. درج تمرینات و مسائل مختلف که جواب آنها نیز ارائه گردیده می‌تواند وسیلهٔ خوبی برای تسلط دانشجویان به این رشته از ریاضیات شود. برای مطالعه این کتاب دانستن ریاضیات در حدّ ریاضیات عمومی دانشگاهی کافی است و در مباحث خاصی که نیاز بیشتر به ریاضیات خاص احساس می‌شود حتی‌الامکان مباحث طوری ارائه شده‌اند که خواننده با مطالعهٔ آن بتواند هم به قواعد ریاضی لازم و هم به مطالب مطروحه

پی‌ببرد.

مدتها نسخهٔ دستنویس این کتاب در کتابخانه شخصی اینجانب به بوتهٔ فرآموشی سپرده شده بود که دوست محترم آقای دکتر عباس اطمینان با مشاهده و بررسی آن علاقه‌مند به تایپ و چاپ آن گردیدند و زحمات نشر را به عهده گرفتند. بر خود لازم می‌دانم تا مراتب تشکر و قدردانی خود را به این نحو اعلام نموده و از بذل توجه و علاقه‌مندی ایشان سپاسگزاری نمایم.

امیدوارم خوانندگان نویسنده را نسبت به کاستی‌های این کتاب واقف نمایند تا در چاپ‌های بعدی اصلاح گردد.

بیژن بیدآباد

۱- مقدمه‌ای بر معادلات تفاضلی و حساب اپراتور

در الگوهای ریاضی گاهی اوقات یک متغیر را می‌توان تابعی از همان متغیر در زمانهای قبل یا بعد دانست. به عبارت دیگر اگر y_t را مقدار متغیر y در زمان t تعریف کنیم یک تابع ریاضی برحسب مقادیر y_t در زمان‌های قبل و بعد می‌توان همانند مثال زیر داشت:

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}) \quad (۱)$$

که y_{t-1}, y_{t-2} مقدار متغیر در زمانهای یک و دو دوره قبل می‌باشند. در این معادله مقدار y_t در هر زمان تابعی از مقدار y در یک و دو دوره زمانی قبل می‌باشد. اینگونه معادلات اصطلاحاً معادلات تفاضلی (difference equations) نامیده می‌شوند. با توجه به معادله (۱) معادلات زیر نیز اشکالی از معادلات تفاضلی می‌باشند.

$$f(y_t, y_{t-1}, y_{t+5}) = 0 \qquad y_{t+1} = f(y_t - y_{t-2}) \quad (۲)$$

۱-۱- تعاریف و آشنائی مقدماتی

همانند سایر توابع ریاضی معادلات تفاضلی دارای اشکال خطی و غیرخطی می‌باشند. اگر مقدار y_t را به شکل یک ترکیب خطی از مقدار y در دوره‌های زمانی مختلف تعریف کنیم به آن معادله تفاضلی خطی می‌گوئیم. برای مثال معادلات تفاضلی زیر خطی می‌باشند:

$$y_t = ay_{t-1} + b \qquad ay_t + by_{t-1} + cy_{t-l} = d \quad (۳)$$

که a،b،c،d اعداد ثابت هستند. مرتبه معادله برابر با حداکثر تأخیر زمانی نسبی متغیرهای معادله می‌باشد (تفاوت بزرگترین و کوچکترین اندیس متغیر اندیس‌دار). برای مثال در معادلات (۳) معادله اول از مرتبه ۱ و معادله دوم از مرتبه ۲ می‌باشند. زیرا در معادله اول y_t تابعی از y در ۱ دوره زمانی قبل است و در معادله دوم تابعی از مقدار y در ۲ دوره قبل است. همچنین در معادلات (۲) مرتبه معادله اول ۳ و مرتبه معادله دوم ۶ می‌باشد. زیرا در معادله اول y_{t+1} تابعی ضمنی از ۳ دوره قبل y یعنی y_{t-2} می‌باشد و در معادله دوم y_{t+5} تابعی ضمنی از ۶ دوره زمانی قبل یعنی y_{t-1} می‌باشد. معادلات تفاضلی خطی مرتبه n به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots a_n y_{t-n} + b \quad (۴)$$

اگر $b = 0$ باشد معادله (۴) یک معادله همگن نامیده می‌شود و اگر $b \neq 0$ باشد یک معادله

غیرهمگن یا کامل نام دارد. اگر b یک عدد ثابت فرض شود و تابعی از t نباشد معادله (۴) معادله تفاضلی خطی مرتبه n با جمله ثابت نام دارد و اگر b تابعی از t باشد معادله فوق معادله تفاضلی با جمله متغیر نامگذاری می‌شود. بطور مثال معادلات زیر از نوع آخری هستند:

$$y_t = 8\,y_{t-2} + t^2$$

$$y_{t-5} + y_{t+3} - \sin(t) = 0$$

اگر در معادله (۴) $a_1,\dots,a_n$ ضرائب ثابتی باشند معادله مزبور معادله تفاضلی خطی با ضرائب ثابت نامیده می‌شود مثلاً:

$$y_t + 2\,y_{t-1} - 3\,y_{t-8} + \frac{1}{t} - 5 = 0$$

اگر $a_1,\dots,a_n$ توابعی از t باشند معادله مزبور معادله تفاضلی خطی با ضرائب متغیر می‌باشد مثلاً:

$$y_t + \sin(tp)\cdot y_{t-3} + \cos\left(tp/4\right)\cdot y_{t-4} + t^2\,y_{t-6} = (1+t)^2 + \log(t)$$

باید توجه کرد که مثالهای فوق همگی معادلات تفاضلی خطی هستند. اگر y_t یک تابع غیرخطی از y در زمانهای قبل یا بعد تعریف شود آن را معادله تفاضلی خطی می‌نامیم. بطور مثال معادلات زیر معادلات تفاضلی غیرخطی هستند:

$$y_t = \left(y_{t+1}\right)^2 + 5$$

$$y_t = \sin(2tp)\left(y_{t+1}\right)^{-1} + \cos\left(tp/6\right)(y+1)^{-2} + \log\left(y_{t-5}\right) + (t-1)^2$$

مرتبه معادلات تفاضلی غیرخطی نیز همانند معادلات تفاضلی خطی تعریف می‌شود. در دو معادله فوق مرتبه معادلات بترتیب یک و شش می‌باشد. حالا به معادله دوم (۳) نگاه کنید اگر t را مساوی دو، سه، چهار، ...، t قرار دهیم داریم:

$$\begin{cases} ay_2 + by_1 + cy_0 = d \\ ay_3 + by_2 + cy_1 = d \\ ay_4 + by_3 + cy_2 = d \\ \qquad\quad \vdots \\ ay_t + by_{t-1} + cy_{t-2} = d \end{cases}$$

این دستگاه شامل $t-2$ معادله و t مجهول $y_t,\dots,y_1,y_0$ می‌باشد. بدین ترتیب برای حل آن احتیاج به دو معادله دیگر داریم. این دو معادله اگر برحسب مثلاً y_0 و y_1 تعریف شوند شرایط اولیه نامیده می‌شوند. بعبارت کلی‌تر برای حل هر معادله تفاضلی از مرتبه n احتیاج به n شرط اولیه اولیه داریم تا بتوانیم آنرا حل کنیم:

$$y_1 = c_1, y_2 = c_2, \ldots, y_n = c_n \qquad (۵)$$

که $c_1, c_2, \ldots, c_n$ مقادیر ثابت داده شده می‌باشند. پس برای حل معادلات تفاضلی احتیاج به فرمولی داریم که اولاً معادله تفاضلی در آن صدق کند و همچنین شرایط اولیه را برقرار نماید.

نتیجه ۱

هر فرمولی که هم جواب اولیه و هم معادله تفاضلی را برقرار نماید جواب معادله تفاضلی است.

تمرین ۱

۱- معادلات تفاضلی زیر را درنظر بگیرید:

1) $y_{t+1} = y_t$ 2) $y_{t+1} = 2y_{t+2}$

3) $y_{t+1} - 2y_t + 4y_{t+2} = 0$ 4) $y_{t+5} = 3y_t$

5) $y_{t+3} - y_{t-1} + 7y_{t+3} = 3$ 6) $y_{t+7} - y_{t-8} + by_{t+3} = 0$

7) $y_{t-1} = b^2 y_{t+3} + 5$ 8) $y_{t+5} = by_t + cy_{t-1} + d$

9) $y_{t+3} + y_t = 3^t$ 10) $y_t = y_{t+1} = 3(b)^t$

11) $y_t - 2y_{t+8} = f(t)$ 12) $(t+1)y_t = 8y_{t+2}$

13) $2y_{t+3} + t^2 y_t = \sin(tp)$ 14) $\sin(t+p)y_{t-2} + y_{t+2} = t!$

15) $2\log y_{t-2} = y_t$ 16) $arc\tan y_t = (y_{t+1})^2 + 5$

17) $y_{t+3} = y_{t-1} y_{t+1}$ 18) $(y_t)^2 - by_{t-1} = c$

19) $5^{y_{t+1}} = y_{t+2} + (t+1)^5$ 20) $t^2 (y_{t+1})^{\frac{3}{2}} = (t-1)\log y_t - b^2 \sin(tp)$

الف: مرتبه معادلات تفاضلی فوق و تعداد شرایط اولیه لازم برای حل آنها را مشخص کنید.

ب: نوع معادلات تفاضلی فوق را برحسب خطی یا غیرخطی بودن همگن یا غیرهمگن بودن و جمله متغیر یا ثابت داشتن مشخص کنید.

۲- اگر تعداد شرایط اولیه بیش از مرتبه معادله تفاضلی باشد در حل معادله تفاضلی چه اشکالی پیش می‌آید بحث کنید.

۳- مقدار y_5 در معادلات تفاضلی زیر را با شرط اولیه $y_0 = 2$ محاسبه کنید:

1) $y_t + 2y_{t+1} = 0$ 2) $y_{t+1} + 2y_{t+2} = 0$

3) $y_{t+1} = by_t$ 4) $y_t = by_{t-1} + d$

چه نکاتی را می‌توان از حل مسائل فوق استنباط نمود؟

۴- اگر $y_0 = 3$ باشد مسئله ۳ را مجدداً حل کنید.

۵- مقدار y_5 در معادله $y_t = 2y_{t-1} + y_{t-2}$ را با شرایط اولیه $y_1 = d, y_0 = c$ محاسبه کنید.

۶- نشان دهید که در چه شرایطی $y_t = 5^t$ معادله تفاضلی $y_t = 5y_{t-1}$ را برقرار می‌نماید.

۷- نشان دهید که معادله تفاضلی $y_t = 5y_{t-1}$ در چه شرایطی معادلـه $y_t = 2(5)^t$ را برقـرار می‌نماید. با مقایسه این مسئله با مسئلهٔ قبل تفاوت آن را روشن کنید.

۸- نشان دهید که معادله تفاضلی $y_t = 5y_{t-1} - 6y_{t-2}$ توسط معادلات زیر برقرار می‌شود.

1) $y_t = (2)^t$ 2) $y_t = 5(2)^t$ 3) $y_t = 5(2)^t + 2(3)^t$

۱-۲- اُپراتورها و توابع فاکتوریل

اغلب در مسائل ریاضی برای ساده‌تر نشان دادن عبارات ریاضی از اپراتورها استفاده می‌شود. اپراتورها طبیعت عملیات ریاضی لازم بر روی آرگومان‌های خود را مشخص می‌کنند. بطور مثال: $\int(\ )dx$ یک اپراتور انتگرال است و انتگرال عبارت داخل پرانتز (اُپراند) را بیان می‌کند. اپراتورها خصوصیات تعریفی خاصی دارند که در زیر آمده است. برای مثال اگر C یا $[\ ]^3$ اپراتور مکعب باشند اپراند آن را به توان ۳ می‌رسانند به‌عبارت دیگر $Cx = x^3$ یا $C(k+x) = (k+x)^3$.

۱- تساوی دو اپراتور: دو اپراتور مساوی خوانده می‌شوند اگر اپراتور A مساوی اپراتور B باشد یا $A = B$ یا $B = A$.

۲- اپراتور واحد یا یکه: اگر برای هر f دلخواه داشته باشیم $If = f$، I اپراتور یکه خوانده می‌شود به جای I اغلب 1 را استفاده می‌کنیم.

۳- اپراتور صفر یا تهی: برای هر f دلخواه اگر $of = \bullet$ باشد o اپراتور صفر یا تهی نامیده می‌شود و اغلب آنرا با $\bullet$ نشان می‌دهیم.

۴- جمع و تفریق اپراتورها: اگر A و B دو اپراتور باشند، تعریف می‌کنیم:

$$(A+B)f = Af + Bf \quad \text{و} \quad (A-B)f = Af - Bf$$

بطور مثال اگر اپراتورهای S و C را اپراتورهای مربع‌کننده و مکعب‌کننده تعریف کنیم مـی‌تـوان نوشت: $(C+S)f = Cf + Sf = f^3 + f^2$

۵- ضرب اپراتورها: برای دو اپراتور A و B تعریف می‌کنیم: $(AB)f = (AB)f = A(B)f$

اگر $A=B$ باشد عبارت فوق تبدیل می‌شود به: $A\,A\,f = AAf = A^2\,f$

برای مثال همانند فوق S و C را اپراتورهای مربع و مکعب کننده تعریف می‌کنیم. عبارات زیر با استفاده از روابط فوق معلوم می‌باشند:

$$(CS)\,f = \left(\left(f\right)^2\right)^3 = f^6 \;،\; (C.C)\,f = \left(\left(f\right)^2\right)^2 = f^4$$

۶- اپراتورهای خطی و غیرخطی: اگر اپراتور A برای توابع دلخواه f و g و ثابت دلخواه a این خاصیت را داشته باشد که: $A(f+g) = Af + Ag\,,\qquad A(a\;f) = a\;Af$

اپراتور A را یک اپراتور خطی می‌نامیم در غیر این‌صورت اپراتور مزبور را اپراتور غیرخطی می‌نامیم. به‌طور مثال اپراتور S و C که در بالا تعریف کردیم اپراتورهای غیرخطی هستند زیرا: $C(f+g) = (f+g)^3 \neq Cf + Cg = f^3 + g^3$

اگر اپراتور D را اپراتور مشتق تعریف کنیم یا: $D = \dfrac{d(\;)}{dx}$ ، اپراتور D خطی است زیرا:

$$D = (f(x) + g(x)) = \frac{df(x)}{d(x)} + \frac{dg(x)}{dx} = Df(x) + Dg(x)$$

$$D(a\;f(x)) = a\,\frac{df(x)}{dx} = a\,Df(x)$$

۷- اپراتور معکوس: اگر A و B دو اپراتور باشند به طوری که برای تابع f دلخواه داشته باشیم: $A(Bf) = f$

می‌توان نوشت: $(AB)\,f = f \Rightarrow AB = I = 1$

بنابراین می‌گوئیم B معکوس A است و می‌توانیم بنویسیم: $B = A^{-1} = 1/A$

بدین ترتیب: $A^{-1}\,f = g \Leftrightarrow Ag = f$

۱-۲-۱- جبر اپراتورها

اگر خواص زیر برای اپراتورها صدق کند می‌توان با آنها همانند سایر مقادیر جبری رفتار نمود. بطور مثال اگر A یک اپراتور باشد که خواص زیر در آن صدق نماید می‌توان نوشت: $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ و قص علیهذا. اگر A و B و C اپراتور باشند در صورت صادق بودن قواعد زیر از آنها می‌توان همانند سایر کمیّت‌های جبری استفاده نمود:

الف) قانون جابجائی برای جمع $A + B = B + A$

ب) قانون شرکت‌پذیری برای جمع $A+(B+C)=(A+B)+C$

ج) قانون جابجائی برای ضرب $AB=BA$

د) قانون شرکت‌پذیری برای ضرب $A(BC)=(AB)C$

ه) قانون توزیعی $A(B+C)=AB+AC$

۱-۲-۲- اپراتور تفاضل

اگر Δ را به عنوان اپراتور اختلاف کمیّتی در دو دوره زمانی پشت سر هم تعریف کنیم، تفاضل مرتبهٔ اول را به شکل زیر نشان می‌دهیم که Δ در آن اپراتور تفاضل نامیده می‌شود.

$$\Delta f(t)\equiv f(t+1)-f(t) \tag{۶}$$

برای مثال $\Delta y_t = y_{t+1}-y_t$

اگر از رابطه فوق تفاضل بگیریم تفاضل مرتبه دوم به شکل زیر پیدا خواهد شد:

$$\Delta(\Delta y_t)=\Delta(y_{t+1}-y_t)=(y_{t+2}-y_{t+1})-(y_{t+1}-y_t)$$

یا به عبارت دیگر:

$$\Delta(\Delta y_t)=\Delta^2 y_t = y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$$

به‌همین ترتیب $\Delta^3 y_t$ و یا $\Delta^n y_t$ را می‌توان پیدا کرد که تفاضل سوم یا تفاضل n ام نامیده می‌شوند. بیان دیگری از اپراتور تفاضل در نمونه‌های زیر آمده است:

$$\Delta(m^t)=m^{t+1}-m^t$$
$$\Delta(t^m)=(t+1)^m-t^m$$
$$\Delta^2(m^t)=(m^{t+2}-m^{t+1})-(m^{t+1}-m^t)=m^{t+2}-2m^{t+1}+m^t$$
$$\Delta^2(t^m)=\left[(t+2)^m-(t+1)^m\right]-\left[(t+1)^m-(t)^m\right]=(t+2)^m-2(t+1)^m+(t)^m$$
$$\Delta(t)=t+1-t=1$$
$$\Delta(m)=m-m=\mathbf{0}$$ (m عدد ثابت)

اپراتور Δ یک اپراتور خطی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta(f(t)+g(t))=\Delta f(t)+\Delta g(t) \qquad \Delta(a\ f(t))=a\,\Delta\, f(t) \tag{۷}$$

۱-۲-۳- اپراتور انتقال

اپراتور انتقال را معمولاً با E نشان می‌دهیم و معنی آن، مقدار متغیر در دوره بعدی است. به عبارت دیگر:

$$Ef(t-1)=f(t) \tag{۸}$$

برای مثال:
$$Ey_{t+1} = y_{t+2}$$
$$E^2 y_{t-3} = Ey_{t-2} = y_{t-1}$$

اپراتور E با اپراتور Δ رابطه زیر را دارد که ۱ اپراتور یکه یا اپراتور واحد می‌باشد:

$$E = \Delta + 1 \qquad (۹)$$

برای مثال:
$$E(y_t) = \Delta y_t + 1(y_t) = y_{t+1} - y_t + y_t = y_{t+1}$$
$$E^2 = (\Delta+1)^2 = \Delta^2 + 2\Delta + 1$$
$$E^2(y_t) = \Delta^2(y_t) + 2\Delta(y_t) + 1(y_t) = \Delta(y_{t+1} - y_t) + 2(y_{t+1} - y_t) + y_t = y_{t+2}$$

۱-۲-۴- اپراتور معکوس تفاضل

طبق قضییه اصلی حساب زیگما $\sum$ معکوس اپراتور تفاضل که با Δ^{-1} نشان داده می‌شود برابر است با:

$$\sum_{t=1}^{n} f(t) = \Delta^{-1} f(t)\Big|_1^{n+1} \qquad (۱۰)$$

درستی این رابطه به شکل زیر اثبات می‌شود. اگر از هر دو طرف Δ بگیریم خواهیم داشت:

$$\Delta\sum_{t=1}^{n} f(t) = \Delta\Delta^{-1} f(t)\Big|_1^{n+1}$$

حال سمت چپ رابسط می‌دهیم:

$$\Delta\sum_{t=1}^{n} f(t) = \Delta(f(1) + f(2) + \ldots + f(n)) =$$
$$f(1+1) - f(1) + f(2+1) - f(2) + \ldots + f(n+1) - f(n) = f(n+1) - f(1)$$

سمت راست برابر خواهد بود با:
$$\Delta\Delta^{-1} f(t)\Big|_1^{n+1} = f(t)\Big|_1^{n+1} = f(n+1) - f(1)$$

بعداً خواهیم دید که از اپراتور Δ^{-1} می‌توان برای حل معادلات تفاضلی استفاده نمود. به عبارت دیگر اگر داشته باشیم:
$$f(t) = y_{t+1} - y_t = \Delta y_t$$

با گرفتن Δ^{-1} از هر دو طرف خواهیم داشت:
$$\Delta^{-1} f(t) = \Delta^{-1}\Delta y_t$$

یا
$$y_t = \Delta^{-1} f(t) = \sum_{p=1}^{n-1} f(t) + c$$

توجه کنید مقدار ثابت c یک عدد دلخواه است که با Δ گرفتن از دو طرف حذف شده و

معادله عیناً به شکل قبل برمی‌گردد. لذا با استفاده از Δ^{-1} می‌توان از عبارت زیر استفاده نمود:

$$\Delta^{-1} f(t)\Big|_1^n = \sum_{t=1}^{n-1} f(t) + c \qquad (۱۱)$$

براحتی می‌توان نشان داد که اپراتور Δ^{-1} یک اپراتور خطی می‌باشد. بدین ترتیب

$$\Delta^{-1}[f(t)+g(t)] = \Delta^{-1} f(t) + \Delta^{-1} g(t) \qquad \Delta^{-1}[a\ f(t)] = a\ \Delta^{-1} f(t)$$

۱-۲-۵- اپراتور تأخیر

اگر $f(t)$ تابعی از t باشد اپراتو تاخیر یا L را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$Lf(t) = f(t-1) \qquad (۱۲)$$

براحتی می‌توان نشان داد که اپراتور L یک اپراتور خطی است. به عبارت دیگر:

$$L(f(t)+g(t)) = Lf(t) + Lg(t) \qquad L(a\ f(t)) = a\ L(t)$$

به طور کلی می‌توان نوشت:

$$L^k f(t) = f(t-k)$$

اپراتور L را برحسب اپراتور Δ و E می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$L = 1-\Delta, \quad L = 2-E \qquad (۱۳)$$

۱-۲-۶- توابع فاکتوریل

تابع فاکتوریل را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$t^m = t(t-1)(t-2)\ldots(t-[m-1]) \qquad \text{m=1,2,3,…} \qquad (۱۴)$$

رابطه فوق شامل m عامل ضرب است. نام فاکتوریل به این دلیل برآن گذاشته شده چون اگر $t=m$ باشد داریم:

$$m^{(m)} = m(m-1)(m-2)\ldots 2\cdot 1 = m!$$

اگر $m=0$ باشد تعریف می‌کنیم $t^{(0)}=1$. برای اعداد صحیح منفی تعریف می‌کنیم:

$$t^{(-m)} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\ldots(t+m)} = \frac{1}{(t+m)^{(m)}} \qquad \text{m=1,2,3,…} \qquad (۱۵)$$

از تعاریف فوق پولی نومیال فاکتوریل را نیز می‌توان تعریف کرد. به روابط زیر توجه کنید:

$$t^{(1)} = t \qquad t^{(2)} = t^2 - t \qquad t^{(3)} = t^3 - 3t^2 + 2t$$

$$t^{(4)} = t^4 + 6t^3 + 11t^2 - 6t \qquad t^{(5)} = t^4 - 10t^4 + 35t^3 - 50t^2 + 24t$$

بدین ترتیب برای عدد صحیح p پولی نومیال فاکتوریل درجه p به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$a_0 t^{(p)} + a_1 t^{(p-1)} + \ldots + ap \qquad a_0, a_1, \ldots, a_p \neq 0 \qquad (۱۶)$$

با استفاده از روابط فوق به راحتی واضح است که پولی نومیال فاکتوریل می‌تواند بعنوان یک

پولی نومیال معمولی از درجه p تعریف شود. تابع تعمیم‌یافته فاکتوریل در ارتباط با هر تابع دلخواه $f(t)$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$[f(t)]^{(m)} = f(t)\,f(t-1)\,f(t-2)\ldots f(t-[m-1]) \qquad m=1,2,3,\ldots \qquad (۱۷)$$

و همچنین برای عدد صحیح m

$$[f(t)]^{(-m)} = \frac{1}{f(t+1)\,f(t+2)\ldots f(t+m)} \qquad m=1,2,3,\ldots \qquad (۱۸)$$

همانطور که خواهیم دید تابع فاکتوریل استفاده زیادی در حل معادلات تفاضلی مشکل‌تر را دارد زیرا می‌توان با استفاده از آن فرمولهائی نظیر مشتق و انتگرال را در حالت گسسته بررسی نمود. بعضی توابع را می‌توان با استفاده از توابع فاکتوریل به شکل دیگری تعریف کرد که عملاً دلتا یا زیگما گرفتن را تسهیل می‌نماید. برای مثال به عبارت زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} t^{(1)}=t \\ t^{(2)}=t(t-1) \end{cases} \Rightarrow t^2 = t^{(2)} + t^{(1)} \qquad (۱۹)$$

$$t^{(m+1)} = t^{(m)}(t-m) \qquad (۲۰)$$

$$tt^{(m)} = t^{(m+1)} + mt^{(m)} \qquad (۲۱)$$

۱-۲-۷- تفاضل توابع خاص

با استفاده از تابع فاکتوریل تفاضل توابع زیر را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$\Delta[c] = 0 \qquad \Delta\left[t^{(m)}\right] = mt^{(m-1)} \qquad \Delta\left[b^t\right] = b^t(b-1)$$

$$\Delta\left[(pt+q)^{(m)}\right] = mp(pt+q)^{(m-1)} \qquad \Delta\left[e^{rt}\right] = e^{rt}\left(e^r - 1\right)$$

$$\Delta[\sin rt] = 2\sin(r/2)\cos r\left(t+\frac{1}{2}\right) \qquad \Delta[\cos rt] = -2\sin(r/2)\sin r\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta[Ln(t)] = Ln(1+1/t) \qquad \Delta[\log_b t] = \log_b(1+1/t) \qquad (۲۲)$$

قواعد زیر را همانند مشتق پیوسته می‌توان برای تفاضل نیز استفاده نمود:

$$\Delta[f(t)+g(t)] = \Delta f(t) + \Delta g(t) \qquad \Delta[a\ f(t)] = a\,\Delta f(t) \quad a = const$$

$$\begin{aligned} \Delta[f(t)g(t)] &= f(t)\Delta g(t) + g(t+1)\Delta f(t) = g(t)\Delta f(t) + f(t+1)\Delta g(t) \\ &= f(t)\Delta g(t) + g(t)\Delta f(t) + \Delta f(t)\Delta g(t) \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

$$\Delta\left[\frac{f(t)}{g(t)}\right] = \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(t+1)}$$

۱-۲-۸- زیگمای توابع خاص

در قسمت قبل فرمول‌های ارائه شده همانند مشتق در حالت پیوسته هستند که همگی بر $\Delta t=1$ تقسیم شده‌اند. اگر بجای $\Delta t=1$ بگذاریم $\Delta t=0$ و علامت Δ را به D تبدیل کنیم (که اپراتور مشتق می‌باشد) تمام فرمول‌ها تبدیل به فرمول‌های مشتق معمولی خواهند شد. همین موضوع برای $\sum$ و $\int$ صادق است که $\sum$ حالت گسسته $\int$ می‌باشد. با استفاده از تابع فاکتوریل فرمول‌های زیر را می‌توانیم بنویسیم که کاربرد زیادی در حل معادلات تفاضلی دارند:

$$\sum a=a\,t \qquad \sum b^t=\frac{b^t}{b-1} \qquad \sum e^{r\cdot t}=\frac{e^{r\cdot t}}{e^r-1}$$

$$\sum t^{(m)}=\frac{t^{(m+1)}}{(m+1)h},\ m\neq -1 \qquad \sum (pt+q)^{(m)}=\frac{(pt+q)^{(m+1)}}{(m+1)p}, m\neq -1$$

$$\sum \sin rt=-\frac{\cos\ r\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}r} \qquad \sum \cos rt=\frac{\sin\ r\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}r} \tag{۲۴}$$

قواعد زیر را نیز همانند انتگرال پیوسته می‌توان برای $\sum$ استفاده نمود:

$$\sum[f(t)+g(t)]=\sum f(t)+\sum g(t) \qquad \sum a\ f(t)=a\sum f(t)\quad a=const$$
$$\sum f(t),\Delta g(t)=f(t)g(t)-\sum g(t+1)\Delta f(t) \tag{۲۵}$$

اپراتور $\sum$ درست برابر عملکرد اپراتور Δ^{-1} می‌باشد. «زیگمای معین» مشابه با «انتگرال معین» را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{1}^{n} f(t)=\Delta^{-1} f(t)\Big|_1^{n+1}=F(N+1)-F(1) \tag{۲۶}$$

۱-۲-۹- زیگمای توابع با استفاده از اپراتور

در فصول بعد در حل بعضی از مسائل نیاز خواهیم داشت که $\sum$ یا Δ^{-1} توابع را بدست آوریم. روش زیر در پیدا کردن جواب روش مناسبی است. حل قدم به قدم آن ارائه می‌شود تا بتوان از آن در مسائل مشابه استفاده نمود. یک مسئله‌ای که زیادتر مورد استفاده واقع می‌شود را اثبات می‌کنیم. اگر $b\neq 1$ و $p(t)$ تابعی از t باشد داریم:

$$\Delta^{-1}\left[b^t p(t)\right]=\sum b^t p(t)=\frac{b^t}{b-1}\left[1-\frac{b\Delta}{b-1}+\frac{b^2\Delta^2}{(b-1)^2}-\frac{b^3\Delta^3}{(b-1)^3}+\mathbf{L}\right]p(t)+c \tag{۲۷}$$

که c مقدار ثابت دلخواه زیگما می‌باشد. برای اثبات می‌توانیم برای هر تابع $F(t)$ بنویسیم:

$$\Delta b^t F(t) = b^{t+1}F(t+1) - b^t F(t) = b^{t+1}EF(t) - b^t F(t) = b^t(bE-1)F(t)$$

فرض می‌کنیم:

$$p(t) = (bE-1)F(t)$$

یا

$$F(t) = \frac{1}{bE-1}\,p(t)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta b^t F(t) = b^t p(t)$$

پس با گرفتن Δ^{-1} داریم:

$$\Delta^{-1}\left[b^t p(t)\right] = b^t F(t) = b^t \frac{1}{bE-1}\,p(t) = b^t \frac{1}{b(1+\Delta)-1}\,p(t)$$

$$= \frac{b^t}{b-1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{b\Delta}{b-1}}\,p(t) = \frac{b^t}{b-1}\left[1 - \frac{b\Delta}{b-1} + \frac{b^2\Delta^2}{(b-1)^2} - \frac{b^3\Delta^3}{(b-1)^3} + \mathbf{L}\right]p(t)$$

که ثابت دلخواه c را نیز می‌توان به آن اضافه نمود. توجه کنید اگر $p(t)$ یک پولی نومیال از مرتبه m باشد سری داخل کروشه در جمله m ام متوقف خواهد شد.

برای بسیاری حالات کلی دیگر نیز می‌توان از روش فوق استفاده نمود. ولی نکته مهم این است که باید اثبات فوق را در مورد آن انجام داد. مثلا رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\Delta^{-1}\left[\frac{1}{b^{t+1}}\,p(t)\right] = \frac{b^{-t}}{1-b}\left[1 - \frac{\Delta}{1-b} + \frac{\Delta^2}{(1-b)^2} - \frac{\Delta^3}{(1-b)^3} + \mathbf{L}\right]p(t) + c \qquad (۲۸)$$

همانند فوق برای هر تابع F(t) می‌توان نوشت:

$$\Delta\left[\frac{1}{b^{t+1}}\,\mathrm{F(t)}\right] = \frac{1}{b^{t+2}}\,\mathrm{F(t+1)} - \frac{1}{b^{t+1}}\,\mathrm{F(t)} = \frac{1}{b^{t+1}}\left[\frac{1}{b}\,\mathrm{E\,F(t)} - \mathrm{F(t)}\right]$$

$$= \frac{1}{b^{t+1}}\left(\frac{E}{b} - 1\right)\mathrm{F(t)} = \frac{1}{b^{t+1}}\left(\frac{E-b}{b}\right)\mathrm{F(t)}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\frac{E-b}{b}\,\mathrm{F(t)} = \mathrm{p(t)}$$

و یا

$$\mathrm{F(t)} = \frac{b}{E-b}\,\mathrm{p(t)}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\Delta\frac{1}{b^{t+1}}\,\mathrm{F(t)} = \frac{1}{b^{t+1}}\,\mathrm{p(t)}$$

با گرفتن Δ^{-1} از طرفین می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{b^{t+1}}F(t) = \Delta^{-1}\frac{1}{b^{t+1}}$$

پس:

$$\Delta^{-1}\frac{1}{b^{t+1}}p(t)=\frac{1}{b^{t+1}}\cdot\frac{b}{E-b}p(t)=\frac{1}{b^{t+1}}\cdot\frac{1}{E/b-1}p(t)$$

$$=\frac{1}{\frac{\Delta+1}{b}-1}p(t)=\frac{1}{b^{t+1}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{b}-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{\frac{1}{b}\Delta}{1/b-1}}p(t)=\frac{1}{b^{t+1}}\frac{b}{1-b}\frac{1}{1+\frac{\Delta}{1-b}}p(t)$$

$$=\frac{b^{-t}}{1-b}\left[1-\frac{\Delta}{1-b}+\frac{\Delta^2}{(1-b)^2}-\frac{\Delta^3}{(1-b)^3}+\mathbf{L}\right]p(t)$$

اگر p(t) یک پولی نومیال باشد در جمله mام سری داخل کروشه متوقف خواهد شد.

تمرین ۲

۱- عبارات زیر را بسط دهید:

1- $\Delta(2t-1)^2$ 2- $E(5t-4)^{1/3}$ 3- $\Delta^2(2t^2-5t)$ 4- $3E^2(t^2+1)$
5- $(\Delta+1)^2(t+1)^2$ 6- $(tE^2+2tE+1)t^2$ 7- Δ^2E^3t 8- $(3\Delta+2)(2E-1)t^2$
9- $(2E-1)(3\Delta+2)t^2$ 10- $(t\Delta E)^2t^2$

۲- درستی یا نادرستی روابط زیر را تعیین کنید.

1- $(E-2)(\Delta+3)=(\Delta+3)(E-2)$ 2- $(E-2t)(\Delta+3t)=(\Delta+3t)(E-2)$

۳- نشان دهید که E یک اپراتور خطی است.

۴- نشان دهید که Δ^2 و E^2 اپراتور خطی هستند و از آن در مورد Δ^n و E^n نتیجه‌گیری نمایید.

۵- نشان دهید که $\Delta E=E\Delta$.

۶- نشان دهید که $E^{-1}f(t)=f(t-1)$ و $E^{-n}f(t)=f(t-n)$ که n یک عدد صحیح می‌باشد.

۷- عبارات زیر را محاسبه کنید.

1- $\Delta(3t^{(5)}+5t^{(4)}-7t^{(2)}+3t^{(1)}+6)$ 2- $\Delta(t^{(-3)}+t^{(-2)})$ 3- $\Delta((t^{(2)}+t^{(-2)})/2)$
4- $\Delta^2(2t^{(-3)}-3t^{(-2)}+4t^{(2)})$ 5- $\Delta(t^4-2t^2+5t-3)$

۸- پولی نومیال‌های زیر را برحسب تابع فاکتوریل بنویسید:

1- $3t^2-5t+2$ 2- $2t^4+5t^2-4t+7$

۹- روابط (۲۲) در ۱-۲-۷ را اثبات کنید. ۱۰- روابط (۲۳) در ۱-۲-۷ را اثبات کنید.

۱۱- روابط (۲۴) در ۱-۲-۸ را اثبات کنید. ۱۲- روابط (۲۵) در ۱-۲-۸ را اثبات کنید.

۲- معادلات تفاضلی خطی همگن مرتبه اول

معادله تفاضلی خطی همگن مرتبه اول را می‌توان به شکل $y_t= ky_{t-1}$ نوشت کـه k یـک مقدار ثابت می‌باشد. برای حل کامل این معادله احتیاج به یک جـواب اولیـه مـثلاً $y_0=c$ داریـم. مقدار t را به ترتیب برابر یک، دو، سه،...،t همراه با جواب اولیه $y_0=c$ در معادلـه تفاضـلی فـوق قرار می‌دهیم:

$$y_1 = ky_0= kc,\quad y_2= ky_1 = k^2c,\quad y_3= ky_2= k^3c\ , \ldots,\quad y_t = k^tc \qquad (۲۹)$$

به عبارت دیگر از روش فوق که به روش عددی موسوم است مقدار y_t را به صورت تابعی از t و مقدار اولیه $y_0=c$ نوشتیم که طبق نتیجه ۱ چون هم جواب اولیه و هم خود معادله تفاضلی را برقرار می‌نماید جواب معادله تفاضلی خطی مرتبه اول همگن می‌باشد.

نتیجه ۲

جواب معادله تفاضل خطی $y_t= ky_{t-1}$ برابر است با $y_t= ck^t$ که در آن $c=y_0$ می‌باشد.

۲-۱- ثبات پویای تعادل

روند زمانی در معادله تفاضلی مرتبهٔ اول فوق بستگی به مقادیر c و k دارد. نتیجتاً چگونگی ثبات پویای تعادل را می‌توان در مقدار این دو پارامتر بررسی نمود. منظور از ثبات پویای تعادل این است که اگر t به سمت بی‌نهایت میل کند مقدار y_t به سمت یک مقدار تعادل ثابت یا صفر یا معین میل خواهد کرد یا اینکه با افزایش t مقدار y_t نیز به بینهایت نزدیک خواهد شد. درحالت اول روند زمانی را با ثبات و درحالت دوم بی‌ثبات می‌نامیم.

۲-۱-۱- اثر k در ثبات پویای تعادل

به عبارت دیگر باید در معادله فوق روند زمانی جمله ck^t را وقتی که t افزایش می‌یابد بررسی نمائیم. واضح است که مقدار k در این قسمت دارای اهمیت بیشتری از c می‌باشد چون به توان t می‌رسد. برای بررسی اثرات k فرض می‌کنیم که مقدار c برابر با یک می‌باشد ($c=1$). به منظور تجزیه و تحلیل این مطلب دامنه تغییرات k که از $+\infty$ تا $-\infty$ می‌باشد را به هفت منطقه متمایز تقسیم می‌کنیم این مناطق در جدول (۲-۱) و همچنین در تصویر (۲-۱) آورده شده است.

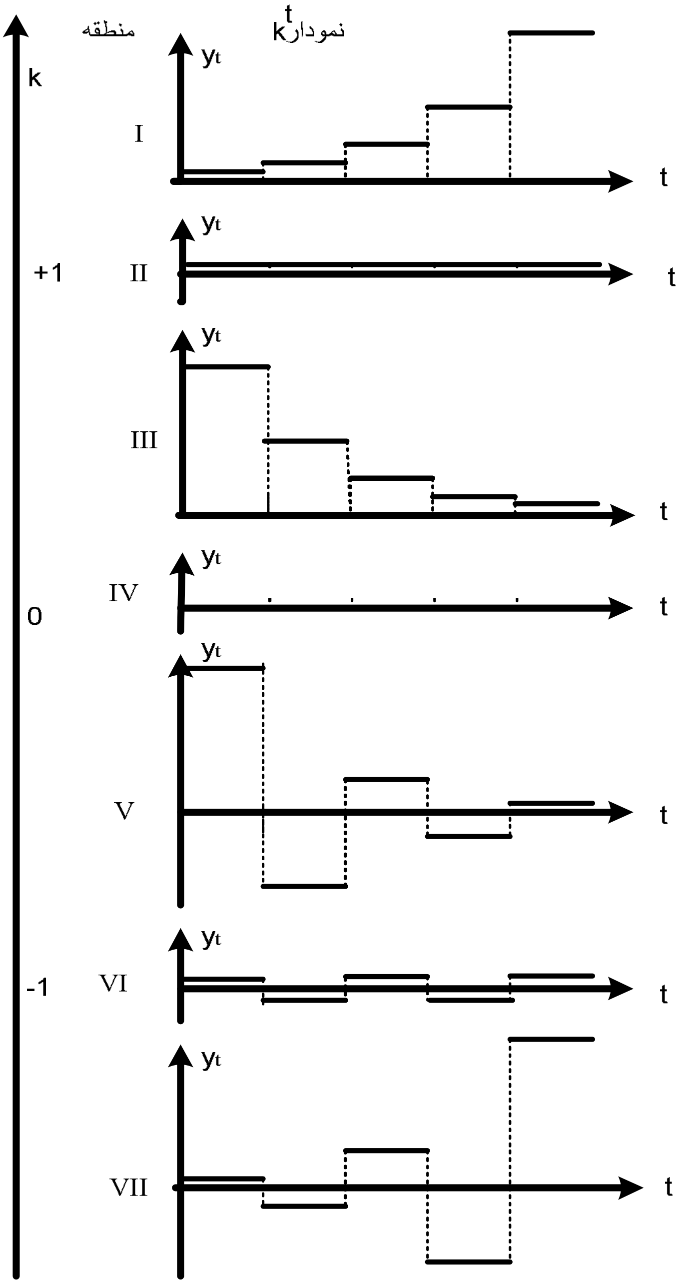
جدول (۲-۱)			مقدار k^t				
منطقه	مقدار k	مثال k^t	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4
I	b>1 (|b|>1)	$(2)^t$	1	2	4	8	16
II	B=1 (|b|=1)	$(1)^t$	1	1	1	1	1
III	0<b<1 (|b|<1)	$(\frac{1}{2})^t$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
IV	b=0 (|b|=0)	$(0)^t$	0	0	0	0	0
V	-1<b<0 (|b|<1)	$(-\frac{1}{2})^t$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$
VI	b=-1 (|b|=1)	$(-1)^t$	1	-1	1	-1	1
VII	b<-1 (|b|>1)	$(-2)^t$	1	-2	4	-8	16

همانطور که از جدول ۲-۱ و تصویر ۲-۱ واضح است، در هر منطقه مقدار k^t باعث ایجاد شکلهای مختلف روند زمانی y می‌شود. در منطقه I که k>1 می‌باشد k^t با افزایش t بیشتر و بیشتر می‌شود. نمودار آن در بالای تصویر ۲-۱ آورده شده است. این نمودار به صورت یک تابع پله‌ای است تا یک منحنی پیوسته. در منطقه II که k=1 می‌باشد k^t برای تمام مقادیر t مساوی با یک می‌باشد. بنابراین شکل آن بصورت یک خط افقی است. در منطقه III، 1<K<0 می‌باشد. در این منطقه یک عدد کوچکتر از یک ولی بزرگتر از صفر به توان t می‌رسد. با افزایش t مقدار k^2 کاهش می‌یابد ولی همیشه مثبت است. در منطقه IV، k=0 می‌باشد و در نتیجه $k^t= 0$ خواهد شد و شکل این معادله خط راستی می‌شود که بر محور t منطبق است. زمانی که مقدار k کوچکتر از صفر باشد مقدار k^t در هر دوره زمانی مقادیر منفی یا مثبت به خود می‌گیرد. در منطقه V که ۱->k<0 با افزایش t قدرمطلق k^t روبه کاهش می‌گذارد ولی خود مقدار k^t بازاء زوج یا فرد بودن t منفی یا مثبت می‌شود. در نتیجه هرچه t بالاتر می‌رود و همانطور که در تصویر مربوط به آن آمده تابع k^t به سمت محور t نزدیک می‌شود. در منطقه VI، k= -1 می‌باشد و تابع k^t بازاء زوج یا فرد بودن t، بالا و پائین محور t قرار می‌گیرد. بالاخره در منطقهٔ VII، زمانی که k<-1 می‌باشد k^t همانند تصویر با افزایش t از محور t دورتر می‌شود.

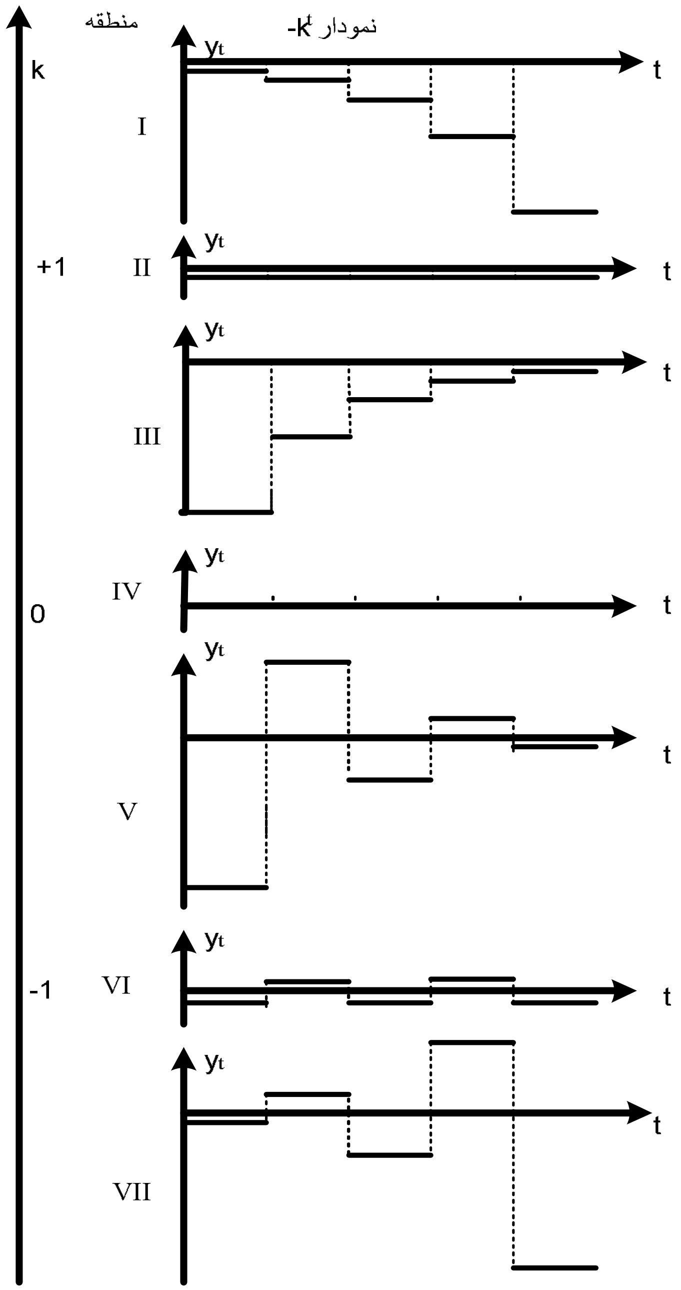
مطالب فوق را می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد. روند زمانی k^t (k≠0) به شکل زیر است:

میرا |k|<1 غیرمیرا |k|>1 نوسان کننده k<0 غیرنوسان کننده k>0

یعنی علامت k نوسان/عدم نوسان و مقدار آن میرایی/نامیرایی روند زمانی y_t را نشان می‌دهد.



تصویر ۲-۱



تصویر ۲–۲

۲-۱-۲- اثر شرط اولیه در ثبات پویای تعادل

زمانی که اثر k را در ثبات پویای تعادل می‌سنجیدیم میزان c را ثابت و برابر یک فرض کرده بودایم. مقدار c در تابع ck^t باعث اثرات مقیاس می‌شود به عبارت دیگر اگر $|c|>1$ باشد مقیاس را بزرگتر و اگر $|c|<1$ باشد باعث کوچکتر شدن مقیاس بر روی محور y_t می‌گردد. اگر $c<0$ باشد تمام نمودارهای تصویر ۲-۱ با قرینه آنها نسبت به محور t عوض می‌شوند چون یک علامت منفی در مقدار k^t ضرب می‌شود. این شکل در تصویر ۲-۲ آورده شده است.

تمرین ۳

۱- معادلات تفاضلی زیر را حل کنید.

1- $y_{t+3} = -y_{t+2}$ $\quad y_0= 10$
2- $y_{t+1} = ay_{t+2}$ $\quad y_0= b$
3- $y_{t+1} = -3y_{t+2}$ $\quad y_5= -4$

۲- در چگونگی روند زمانی معادلات زیر بحث کنید.

1- $y_t= 3^t$ $\qquad$ 2- $y_t= 2(\frac{1}{3})^t$

3- $y_t= 5(-\frac{1}{10})^t$ $\qquad$ 4- $y_t= -3(\frac{1}{4})^t$

۳- در چگونگی روند زمانی معادلات تمرین ۱ بحث کنید.

۴- در معادله تفاضلی $y_t = (\frac{a}{a-b})y_{t-1}$ که a و b پارامترهای نامشخص هستند چگونگی روند زمانی y_t را بر حسب a و b بررسی نمائید.

۳- معادلات تفاضلی خطی مرتبه دوم همگن

معادلات تفاضل خطی مرتبه دوم همگن دارای شکل کلی زیر هستند که a و b مقادیر ثابت می‌باشند:

$$y_t + ay_{t-1} + by_t = 0 \qquad (۳۰)$$

همانند معادله تفاضلی مرتبه اول جواب آزمایشی زیر را برای معادله تفاضلی (۳۰) در نظر بگیرید.

$$y_t = x^t \qquad (۳۱)$$

این رابطه را برای زمان‌های t-2، t-1 می‌نویسیم.

$$y_{t-1} = x^{t-1} \qquad y_{t-2} = x^{t-2}$$

معادلات فوق را در (۳۰) جایگزین می‌کنیم:

$$x^2 + ax^{t-1} + bx^{t-2} = 0$$

طرفین را بر x^{t-2} تقسیم می‌کنیم. حاصل به قرار ذیل می‌شود:

$$x^2 + ax + b = 0 \qquad (۳۲)$$

این معادله به نام معادله کرکتریستیک charachteristic equation یا معادلهٔ مشخِص خوانده می‌شود که در این حالت از درجه دوم بوده و دارای ریشه‌های زیر می‌باشد:

$$x', x'' = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

با جایگزین در ۳۱ داریم:

$$y_t = (x')^t,\ y_t = (x'')^t \qquad (۳۳)$$

این دو جواب اخیر برای y_t معادله تفاضلی (۳۰) را برقرار می‌نمایند. با جایگزینی این مقادیر در (۳۰) این نتیجه واضح است ولی شرایط اولیه را برقرار نمی‌نمایند. برای روشن شدن این موضوع به مثال زیر توجه کنید:

<u>مثال ۳-۱</u>

معادله تفاضلی $y_t - 5\frac{1}{4}y_{t-1} - 5y_{t-2} = 0$ را با شرایط اولیه $y_0 = 3$ و $y_1 = 6\frac{1}{2}$ را حل کنید.

با احتساب جوابی چون (۳۱) معادله کرکتریستیک (۳۲) را برای معادله تفاضلی فوق تشکیل می‌دهیم:

$$x^2 - 5\frac{1}{4}x - 5 = 0 \qquad x' = 4 \text{ ، } x'' = 1\frac{1}{4} \implies y_t = (4)^t ,\ y_t = (1\frac{1}{4})^t$$

این جواب شرط اولیه $y_0 = 3$ و $y_1 = 6\frac{1}{2}$ را برقرار نمی‌نماید زیرا:

$$y_0 = 4^0 \neq 3, \qquad y_0 = (1\frac{1}{4})^0 \neq 3$$

$$y_1 = (4)^1 \neq 6\frac{1}{2}, \quad y_1 = (1\frac{1}{4})^1 \neq 6\frac{1}{2}$$

۳-۱- اصلاح برای شرایط اولیه

برای رسیدن به جوابی که هم معادله تفاضلی و هم شرایط اولیه را برقرار نماید قضیه زیر را ملاحظه کنید:

قضیه۱

اگر $y_{1,t}$ و $y_{2,t}$ فرمول‌هائی باشند که معادله تفاضلی مرتبهٔ دوم را برقرار نمایند $Ay_{1,t}$و $By_{2,t}$ نیز آن معادله را برقرار خواهند ساخت که A و B اعداد ثابت دلخواه می‌باشند.

اگر فرض کنیم $y_t = Ay_{1,t} + By_{2,t}$ و بجای y_{t-2} و y_{t-1}مقادیر مربوطه را در معادله تفاضلی (۳۰) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$y_t = -a(Ay_{1,t-1}\ ABy_{2,t-1}) - b(Ay_{1,t-2} + By_{2,t-2})$$

با جابجائی جملات داریم:

$$y_t = A[-ay_{1,t-1} + By_{1,t-2}] + B[-ay_{2,t-1} - by_{2,t-2}]$$

اما از آنجائی که فرض کردیم $y_{1,t}$ و $y_{2,t}$ معادله تفاضلی (۳۰) را برقرار می‌نمایند پس باید داشته باشیم:

$$y_{1t} = -ay_{1,t-1} - by_{1,t-2} \quad , \quad y_{2t} = -ay_{2,t-1} - by_{2,t-2}$$

عبارات فوق را در کروشه‌های y_t جایگزین می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$y_t = Ay_{1,t} + By_{2,t}$$

بدین ترتیب این رابطه برای y_t نیز یک جواب معادله (۳۰) می‌باشد و قضیه ثابت شده است.

مجدداً به حل معادله تفاضل (۳۰) برگردیم که شرایط اولیه را نیز بتواند برقرار نماید. طبق قضیه ۱ و با استفاده از (۳۳) فرمول زیر در معادله (۳۰) صادق است:

$$y_t= A(x')^t + B(x'')^t \qquad (۳۴)$$

که A و B اعداد ثابت دلخواه می‌باشند. برای اینکه شرایط اولیه $y_0=c_0$ و $y_1= c_1$ در معادلـه (۳۰) صادق باشند باید داشته باشیم:

$$y_0 = A(x')^0 + B(x'')^0 = c_0 \quad ==> \quad A+B = c_0$$
$$y_1 = A(x')^1 + B(x'')^1 = c_1 \quad ==> \quad Ax'+Bx'' = c_1$$

از دستگاه فوق مقادیر A , B را محاسبه مـی‌کنـیم و در معادلـه (۳۴) قـرار مـی‌دهـیم تـا جـواب بدست آید.

مثال ۳-۲

مثال ۳-۱ را حل کنید.

با توجه بـه مثـال ۳-۱ و بـا اسـتفاده از (۳۴) داریـم: $y_t = A(4)^t + B(1\frac{1}{4})^t$ و

برای شرایط اولیه داریم

$$A+B= 3, \quad 4A+ 1\frac{1}{4}\ B= 6\frac{1}{2} \quad ==> \quad A= 1\ , \quad B=2$$

پس جواب نهائی برابر خواهد بود با: $y_t = 4^t + 2(1\frac{1}{4})^t$

تمرین ۴

۱- معادلات تفاضلی زیر را حل کنید.

1- $y_t = 4y_{t-1} -3y_{t-2}$ $\quad y_0= 2 \quad y_1= 4$
2- $y_t = 6y_{t-1} -8y_{t-2}$ $\quad y_0= 8 \quad y_1= 22$
3- $y_t = 5y_{t-1} -6y_{t-2}$ $\quad y_0=-3 \quad y_1= -4$
4- $y_t = 3y_{t-1} + 10y_{t-2}$ $\quad y_0= 8 \quad y_1= -2$
5- $y_t = 8y_{t-1} -12y_{t-2}$ $\quad y_0= 57 \quad y_1= 334$
6- $y_t = 4y_{t-2}$ $\quad y_0= 8 \quad y_1= -4$

۲- چرا روش ارائه شده در این بخش برای معادلات زیر عمل نمی‌کند:

1- $y_t= 5y_{t-1} -9y_{t-2}$ $\qquad$ 2- $y_t= 3y_{t-1}- 10y_{t-2}$

۴- معادلات تفاضلی همگن از مرتبه n

معادلات تفاضلی با مرتبه بیش از دو تعمیم معادله تفاضلی مرتبه دوم به مرتبه nام می‌باشد. تمام قضایا و روشی که در مورد معادله مرتبه دوم بکار می‌بریم دربارهٔ معادله مرتبه n نیز بکار گرفته می‌شود. تنها فرقی که باقی می‌ماند در روش حل معادله کرکتریستیک می‌باشد. در این قسمت یک دید کلی نسبت به این گونه معادلات ارائه می‌شود و در فصول بعدی بیشتر راجع به معادلات کرکتریستیک بحث خواهیم نمود. شکل کلی زیر را برای معادلات تفاضلی مرتبه nام همگن (بدون عدد ثابت) در نظر می‌گیریم:

$$Y_t = a_1y_{t-1} + a_2y_{t-2} + \ldots + a_ny_{t-n} \qquad (۳۵)$$

در معادله تفاضلی مرتبه اول داشتیم: اگر $y_t = cy_{t-1}$ باشد جواب به شکل $y_t = cx^t$ خواهد بود. این رابطه را برای زمان‌های مختلف می‌نویسیم: $y_{t-1} = cx^{t-1}, \ldots,$ $y_{t-n} = cx^{t-n}$

معادلات فوق را در (۳۵) جایگزین می‌کنیم: $cx^t = ca_1 x^{t-1} + ca_2 x^{t-2} + \ldots + ca_n x^{t-n}$

طرفین را بر cx^{t-n} تقسیم می‌نمائیم. حاصل برابر است با:

$$x^n = a_1x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (۳۶)$$

رابطه فوق معادله پلی نومیال کرکتریستیک ما خواهد بود که از درجه n می‌باشد. برای معادلاتی نظیر n و پیدا کردن ریشه‌های آن وقتی n بیش از چهار باشد فرمولی برای نداریم. البته راه‌حل‌های عددی برای حل اینگونه پولی نومیال‌ها وجود دارند. به هرحال می‌دانیم که پولی نومیال (۳۶) دارای n ریشه می‌باشد که آنها را $x_1, x_2, \ldots, x_n$ می‌نامیم.

<u>قضیه ۲</u>

اگر y_{1t} , y_{2t} ... , y_{nt} فرمول‌هائی باشند که تمام آنها در معادله تفاضلی مرتبه nام صدق کنند $b_1y_{1t} + b_2y_{2t} + \ldots + b_ny_{nt}$ نیز یک جواب همان معادله تفاضلی مرتبه n می‌باشد. $b_n,\ldots,b_2,b_1$ اعداد ثابت دلخواه هستند.

این قضیه تعمیم قضیه ۱ می‌باشد و اثبات آن کاملاً شبیه به آن است.

برای حل معادله تفاضلی مرتبه nام باید n شرط اولیه داشته باشیم:

$$y_0 = c_0 , y_1 = c_1 , \ldots , y_{n-1} = c_{n-1}$$

از طرفی طبق قضیه ۲ فرمول زیر در معادله (۳۵) صدق می‌کند.

$$y_t = b_1(x_1)^t + b_2(x_2)^t + \ldots + b_n(x_n)^t \quad (۳۷)$$

که $b_1, b_2, \ldots, b_n$ اعداد ثابت دلخواه هستند که مقدار آنها را با مقادیر شرایط اولیه محاسبه خواهیم نمود. برای اینکه شرایط اولیه در معادله (۳۵) صدق کند باید:

$$y_0 = b_1(x_1)^0 + b_2(x_2)^0 + \ldots + b_n(x_n)^0 = c_0$$
$$y_1 = b_1(x_1)^1 + b_2(x_2)^1 + \ldots + b_n(x_n)^1 = c_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{n-1} = b_1(x_1)^{n-1} + b_2(x_2)^{n-1} + \ldots + b_n(x_n)^{n-1} = c_{n-1}$$

با حل دستگاه n معادله n مجهولی فوق جواب‌هائی برای $b_1, b_2, \ldots, b_n$ بدست می‌آوریم که اگر آنها را در (۳۷) قرار دهیم جواب معادله (۳۵) بدست خواهد آمد.

مثال ۴-۱

معادله تفاضلی مرتبه چهارم $y_t = 3y_{t-1} + 15y_{t-2} - 19y_{t-3} -30y_{t-4}$ را با شرایط اولیه زیر حل کنید: $y_3 = 304 , y_2= 90 , y_2= 90 , y_1=6 , y_0= 5$

پولی نومیال کرکتریستیک (۳۶) را تشکیل می‌دهیم.

$$x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30= 0$$

که دارای ریشه‌های $x_1 = -1 , x_2 = 2 , x_3= -3 , x_4= 5$ می‌باشد. با جایگزینی این ریشه‌ها در (۳۷) خواهیم داشت:

$$y_t= b_1(-1)^t + b_2(+2)^t + b_3(-3)^t + b_4(+5)^t$$

برای اینکه شرایط اولیه هم در جواب فوق صدق کند مقادیر b_1, b_2, b_3, b_4 را پیدا می‌کنیم:

$$y_0 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 5$$
$$y_1 = b_1 + 2b_2 - 3b_3 + 5b_4 = 6$$
$$y_2 = b_1 + 4b_2 + 9b_3 + 25b_4 = 90$$
$$y_3 = -b_1 + 8b_2 -27 b_3 + 125b_4 = 304$$

از حل دستگاه معادلات فوق مقادیر زیر را بدست می‌آید: $b_1 = 1 , b_2= -1 , b_3= 2 , b_4= 3$

بنابراین جواب معین برابر است با: $y_t= (-1)^t-(2)^t + 2(-3)^t + 3(5)^t$

تمرین ۵

۱- پولی نومیال کرکتریستیک معادلات تفاضلی زیر را تشکیل دهید:

1- $y_{t+1} + y_{t+2} + y_{t+3} + y_{t+4} + y_{t+5}+ y_{y+7}= 0$

2- $2y_t - by_{t-1} + cy_{t-8}= 0$

3- $y_{t-1} + dy_{t-9} = 0$

4- $y_{t+3} - y_{t+8} = 0$

۲- آیا روش بحث شده در این قسمت قادر به حل معادلات تفاضلی فوق خواهد بود؟

۵- معادلات تفاضلی خطی غیرهمگن

به طور کلی معادله تفاضلی خطی غیرهمگن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_n y_{t-n} + b \qquad (۳۸)$$

۵-۱- معادله تفاضلی خطی غیرهمگن مرتبه اول

معادله زیر که یک معادلهٔ تفاضلی خطی غیرهمگن از مرتبه اول می‌باشد را در نظر بگیرید که c,a ثابت هستند:

$$Y_{t+1} + ay_t = L \qquad (۳۹)$$

در معادلات تفاضلی غیرهمگن جواب عمومی شامل دو قسمت می‌باشد یک جواب خاص y_p که عبارت است از هر جواب معادله غیرهمگن (۳۹) می‌باشد و تابع مکمل y_c که جواب عمومی معادله همگن شده (۴۰) می‌باشد.

$$y_{t+1} + ay_t = 0 \qquad (۴۰)$$

جواب خاص y_p بیانگر مقدار تعادل موقتی اولیه و تابع مکمل تعیین کننده انحراف‌های ناشی از روند زمانی از تعادل موقتی اولیه می‌باشد. مجموع y_c , y_p جواب عمومی را ایجاد خواهد کرد. ناگفته نماند همانند قبل یک شرط اولیه نیز لازم می‌باشد. اول تابع مکمل را درنظر بگیرید. با استفاده از نتیجه ۲ می‌توانیم بنویسیم: $y_{t+1} = ck^{t+1}$, $y_t = ck^t$

روابط فوق را در معادله همگن (۴۰) جایگزین می‌کنیم: $ck^{t+1} + ack^t = 0$

از ck^t فاکتور می‌گیریم: $ck^t (k+a) = 0$

ck^t را مخالف صفر در نظر می‌گیریم. چون اگر $ck^t = 0$ باشد نمودار آن یک خط راست است که بر محور افقی منطبق می‌شود. پس مقدار $k+a$ باید مساوی صفر باشد. پس: $k=-a$ خواهد بود. عبارت فوق بدین معنی است که در جواب آزمایشی باید k را مساوی‌a- قرار داد. پس بدین ترتیب تابع مکمل باید به شکل زیر نوشته شود: $y_c (= ck^t) = c(-a)^t$

حال باید به دنبال جواب خاص بگردیم که معادله (۳۹) را حل کند. قبلاً گفتیم که برای y_p می‌توانیم هر جوابی از (۳۹) را انتخاب کنیم. بنابراین، اگر جواب آزمایشی با ساده‌ترین شکل $y_t=M$ (M یک عدد ثابت است) بتواند جواب باشد مشکل دیگری نخواهیم داشت. حالا اگر

$y_t= M$ باشد y مقدار ثابت M را در تغییرات زمان حفظ خواهد کرد. پس همچنین باید داشته باشیم $y_{t+1}= M$. این مقادیر را در (۳۹) جایگزین می‌کنیم: $M+aM= L \implies M= \frac{L}{1+a}$

از آنجائیکه این M خاص معادله را برقرار می‌کند، جواب خاص را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$Y_p(=M) = \frac{L}{1+a} \qquad (a\neq-1)$$

اگر $a=-1$ باشد، جواب خاص $\frac{L}{1+a}$ تعریف نشده است و باید روش دیگری برای حل معادله غیرهمگن پیدا کنیم. لذا جواب $y_t= Mt$ را آزمایش می‌کنیم. پس داریم: $y_{t+1} = M(t+1)$

این را در (۳۹) جایگزین می‌کنیم: $M(t+1)+aMt=L \implies M= \frac{L}{t+1+at}$

چون $a=-1$ است پس $M=L$ خواهد بود. بدین ترتیب: $y_p(= Mt)= Lt$

این شکل جواب خاص یک تابع غیرثابت از t می‌باشد، و بنابراین بیانگر یک تعادل متحرک است. مجموع y_c , y_p جواب عمومی را تشکیل داده که برای دو حالت مختلف فوق به شکل زیر ارائه می‌شوند:

$$y_t = y_c+ y_p \tag{۴۱}$$

$$y_t = c(-a)^t+ \frac{L}{1+a} \qquad (a\neq-1) \tag{۴۲}$$

$$y_t = c(-a)^t + Lt= c+Lt \qquad (a=-1) \tag{۴۳}$$

ولی با وجود عدد ثابت دلخواه c، (۴۲) و (۴۳) دقیقاً تعیین کننده y_t نمی‌باشند. برای حذف این مقدار ثابت مقدار y_t را در زمان $t=0$ محاسبه می‌کنیم (y_0). در (۴۲) به شکل زیر می‌شود:

$$c= y_0 - \frac{L}{1+a}$$

و نتیجتاً جواب نهائی برای (۴۲) با استفاده معادله فوق از قرار ذیل می‌شود:

$$y_t = \left(y_0 - \frac{L}{1+a}\right)(-a)^t + \frac{L}{1+a} \qquad (a\neq -1) \tag{۴۴}$$

همین عملیات را برای (۴۳) انجام می‌دهیم. t را مساوی صفر قرار داده مقدار y_0 را از (۴۳) محاسبه می‌کنیم. در نتیجه $y_0= c$ می‌شود. بنابراین، جواب (۴۳) به شکل زیر تبدیل می‌گردد:

$$y_t= y_0+ Lt \qquad (a= -1) \tag{۴۵}$$

جوابهای (۴۴) و (۴۵) «جواب معین» یا «جواب نهائی» نامیده می‌شوند.

مثال ۵-۱

معادله تفاضلی $y_t - 5y_{t-1} = 1$ را با شرط اولیه $y_0 = \frac{7}{4}$ حل کنید.

برای یافتن تابع مکمل معادلهٔ همگن $y_t - 5y_{t-1} = 0$ را تشکیل داده و مقدار $y_t = ck^t$ را در آن جایگزین می‌کنیم: $ck^t - 5ck^{t-1} = 0 \implies k = 5 \implies y_c = c(5)^t$

جواب خاص y_p را با استفاده از جواب آزمایشی $y_t = M$ و قرار دادن آن در معادلهٔ غیرهمگن بدست می‌آوریم:

$M - 5M = 1 \implies m = -\frac{1}{4} \implies y_p = -\frac{1}{4}$

جواب عمومی از مجموع تابع مکمل و جواب خاص بدست می‌آید: $y_t = c(5)^t - \frac{1}{4}$

با قرار دادن $t=0$ استفاده از y_0 مقدار ثابت دلخواه c را پیدا می‌کنیم.

$$y_0 = c(5)^0 - \frac{1}{4} \implies \frac{7}{4} = c - \frac{1}{4} \implies c = 2$$

جواب معین برابر خواهد بود با: $y_t = 2(5)^t - \frac{1}{4}$

۵-۱-۱- همگرائی به سمت تعادل

در قسمت ۲-۱ راجع به ثبات پویای تعادل در معادلات تفاضلی همگن مرتبه اول صحبت شد و تابع مکمل برای تجزیه و تحلیل ثبات پویای تعادل مدّ نظر قرار گرفت. در این قسمت معادله تفاضلی را به صورت غیرهمگن در نظر می‌گیریم و جواب خاص را در رابطه با تابع مکمل ck^t بررسی می‌کنیم. همانطور که در ابتدای قسمت ۵-۲ مطرح گردید، جواب خاص y_p بیانگر مقدار تعادل موقتی اولیه و تابع مکمل y_c تعیین کننده انحراف‌های ناشی از روند زمانی از تعادل موقتی اولیه می‌باشد. اگر جمله‌ای مانند $y_p=5$ به جمله ck^t اضافه شود، تابع ما که نشان دهنده روند زمانی می‌باشد باید به سمت بالا به اندازه مقدار ۵ انتقال یابد. پس واضح است که این امر باعث همگرائی یا واگرائی تابع روند زمانی نخواهد شد؛ اما آن سطحی را که همگرائی یا واگرائی تابع روند زمانی نسبت به آن اتفاق خواهد افتاد را تغییر می‌دهد. چیزی را که تصاویر ۲-۱ و ۲-۲ نشان می‌دهند همگرائی یا واگرائی ck^t نسبت به سطح تعادل صفر است. زمانی که y_p اضافه شود سئوال جدید این است که همگرائی روند زمانی $y_t = y_c + y_p$

نسبت به سطح تعادل y_p چه خواهد بود؟ در این ارتباط یک حالت خاص $k=1$ را در منطقه II تصویر ۲-۱ در نظر می‌گیریم. روند زمانی یک تابع مانند $y_T= c(1)^T + y_P = c+y_P$ به علت وجود جمله $(1)^t=1$ هیچگونه اثرات غیرمیرا تولید نمی‌کند. به هر حال y_t مقدار $c+y_p$ را به خود می‌گیرد تا مقدار تعادل y_p را؛ در واقع y_t هیچوقت نمی‌تواند به مقدار y_p برسد مگر اینکه $c=0$ باشد. حال اگر $1>k>0$ باشد با افزایش t، y_t به سمت سطح تعادل y_p حرکت خواهد کرد و اگر $1<k<0$ باشد روند زمانی واگرا خواهد بود. بطور کلی واگرائی و همگرائی نسبت به سطح تعادل y_p بستگی به مقدار k دارد و اگر $|k|<1$ باشد تابع روند زمانی نسبت به سطح تعادل y_p همگرا خواهد بود. به عبارت دیگر $y_t= y_c + y_p$ نسبت به سطح تعادل y_p گرایش زیر را دارد:

نسبت به سطح تعادل y_p واگرا $|k|>1$

نسبت به سطح تعادل y_p همگرا $|k|<1$

۵-۲- حل معادله تفاضلی خطی مرتبه دوم غیرهمگن

نکاتی که راجع به جواب خاص و تابع مکمل در قسمت ۵-۲ گفته شد را با ذکر قضیه‌ای کامل می‌کنیم:

قضیه ۳

اگر w_t رابطه‌ای باشد که معادله همگن مرتبه دوم زیر را برقرار سازد:

$$y_t= a_1y_{t-1} + a_2y_{t-2} \qquad (۴۶)$$

و همچنین z_t رابطه‌ای باشد که معادله غیرهمگن مرتبه دوم زیر را برقرار نماید:

$$y_t= a_1y_{t-1} + a_2y_{t-2} + b \qquad (۴۷)$$

$w_t + z_t$ نیز معادله (۴۷) را برقرار می‌سازد.

اثبات: باید توجه داشت که معادله (۴۷) همان معادله (۴۶) است که مقدار ثابت b به آن افزوده شده است. $w_t + z_t$ را در سمت راست (۴۷) جایگزین می‌کنیم.

$$a_1(w_{t-1} + z_{t-1}) + a_2 (w_{t-2} + z_{t-2}) + b$$

حال باید نشان دهیم که عبارت فوق برابر با $w_t + z_t$ می‌باشد. برای این منظور a_1 و a_2 را در پرانتزها ضرب کرده و wها و zها را جابجا می‌کنیم. حاصل به شکل زیر می‌شود:

$$[a_1w_{t-1} + a_2w_{t-2}] + [a_1z_{t-1} + a_2z_{t-2} + b]$$

از آنجائی که w_t در (۴۶) صادق است پس کروشه اول برابر w_t می‌باشد و همچنین چون z_t در (۴۷) صدق می‌کند پس کروشه دوم هم برابر با z_t می‌باشد و نتیجتاً عبارت فوق برابر با $w_t + z_t$ می‌گردد و قضیه ثابت شده است. باید توجه داشت در این قضیه هیچگونه تأکیدی نداشتیم که b یک عدد ثابت باشد. بدین ترتیب می‌توانیم روشی مشابه روش فوق را برای حل معادلاتی که یک جمله متغیر ساده داشته باشند بکار بریم.

با توجه به توضیحات قسمت ۵-۲ درمی‌یابیم که z_t برابر با جواب خاص (y_p) و w_t تابع مکمل (y_c) می‌باشند و در نتیجه جواب نهائی برابر با $y_t= y_p+ y_c$ یا $y_t = z_t + w_t$ می‌باشد. پس برای بدست آوردن جواب نهائی در درجه اول احتیاج به محاسبهٔ جواب خاص و سپس به تابع مکمل داریم. برای روشن شدن مطلب معادله زیر در نظر بگیرید:

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t= L \tag{۴۸}$$

برای پیدا کردن جواب خاص، جواب $y_t= M$ را در معادله کامل (۴۸) آزمایش می‌کنیم.

$$M+aM+bM= L \implies M= \frac{L}{1+a+b}$$

بدین ترتیب مادامی که $1+a+b\neq 0$ باشد جواب خاص برابر است با:

$$y_p(=M)= \frac{L}{1+a+b} \quad (a+b\neq -1) \tag{۴۹}$$

زمانی که $a+b=-1$ باشد جواب آزمایشی $y_t= M$ شکست می‌خورد و باید بجای آن جواب $y_t=Mt$ را آزمایش کنیم. خواهیم داشت:

$$M = \frac{L}{(1+a+b)t+a+2}$$

چون $a+b= -1$ است پس:

$$M=\frac{L}{a+2}$$

بدین ترتیب جواب خاص در حالتی که $a+b=-1$ و $a\neq -2$ باشد به شکل زیر است:

$$Y_p(=m)\ \frac{L}{a+2} \qquad (a+b= -1 \quad , a\neq -2) \tag{۵۰}$$

اگر حالتی داشتیم که $a=-2$، $a+b=-1$ بود (واضح است که $b=1$ می‌باشد)، باید جواب آزمایشی $y_t= Mt^2$ را امتحان کنیم. پس:

$$M = \frac{L}{(t+2)^2 + a(t+1)^2 + bt^2}$$

با وارد کردن $b=1$ و $a=-2$ در معادله فوق و ساده کردن آن جواب خاص را بدست می‌آوریم:

$$y_p\,(=m) = \frac{1}{2}t^t \qquad (a=-2\ ,\ b=1) \tag{۵۱}$$

حال تابع مکمل را محاسبه می‌کنیم. معادله همگن زیر را حل می‌کنیم:

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t=0 \tag{۵۲}$$

حل این معادله که تفاضلی همگن از مرتبه دوم می‌باشد در فصل ۳ کاملاً توضیح داده شده است. معادله کرکتریستیک را برای (۵۲) می‌نویسیم:

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{۵۳}$$

که ریشه‌های کرکتریستیک آن برابرند با:

$$x',x'' = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

با استفاده از قضیه ۱ اگر A و B اعداد ثابت دلخواه باشند داریم:

$$y_c= A(x')^t+ B(x'')^t \tag{۵۴}$$

بالاخره جواب نهائی به شکل حاصل جمع جواب خاص و تابع مکمل می‌باشد:

$$y_t= A(x')^t+ B(x'')^t+y_p$$

حال با توجه به y_p که در شرایط مختلف توضیح داده شد می‌توانیم برای هرکدام از حالات زیر جواب‌های عمومی زیر را در نظر بگیریم:

$$Y_t= A(x')^t + B(x'')^t+ \frac{L}{1+a+b} \qquad (a+b\neq-1) \tag{۵۴}$$

$$Y_t= A(x')^t + B(x'')^t+ \frac{L}{a+2} \qquad (a+b\neq-1\ ,\ a\neq-2) \tag{۵۵}$$

$$Y_t= A(x')^t + B(x'')^t+ \frac{1}{2}t^2 \qquad (a= -2\ ,\ b=1) \tag{۵۶}$$

در مرحله آخر باید با توجه به شرایط اولیه مقادیر A , B را محاسبه کنیم. بطور مثال برای (۵۴) با داشتن شرایط اولیه $y_0=c_0$ $y_1=c_1$ باید:

$$y_0= A(x')^0 + B(x'')^0+\frac{L}{1+0+t}= c_0$$

$$y_1= A(x')^1 + B(x'')^1+\frac{L}{1+0+b}= c_1$$

از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی فوق مقادیر A , B بدست می‌آیند که آنها را در (۵۴) جایگزین می‌کنیم و جواب معادله (۴۸) بدست می‌آید.

در مطالب فوق باید توجه داشت که فرض کردیم معادله درجه دوم (۵۳) دارای دو ریشه متمایز حقیقی می‌باشد. در صورتی که x' و x'' ریشه‌های مختلط (complex) باشند باید روش را عوض کنیم. بعداً راجع به این موضوع خواهیم پرداخت.

مثال ۵-۲

معادله تفاضلی $y_t= 2y_{t-1} + 3y_{t-2} + 8$ را با شرایط اولیه $y_0=6$, $y_1=2$ حل کنید.

حل: برای حل معادله فوق عدد ثابت معادله را حذف کرده تا تبدیل به یک معادله همگن شود:

$$y_t= 2y_{t-1} + 3y_{t-2}$$

پولی نومیال کرکتریستیک معادله فوق را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2 -2x -3= 0 \quad ==> \quad x'=3 , x''=1$$

x' و x'' را درون (۵۴) می گذاریم: $y_c= A(3)^t+ B(-1)^t$

حالا جواب خاص را باید پیدا کنیم. برای اینکار یا روش نشان داده را می‌توان دنبال کرد یا اینکه مستقیماً از فرمول‌های (۴۹) و (۵۱) استفاده نمود. اگر بخواهیم روش قدم به قدم را دنبال کنیم مقدار $y_t=M$ را در معادله کامل آزمایش می کنیم. پس: $y_t=M$, $y_{t-1}=M$, $y_{t-2} =M$

در نتیجه: $M= 2M + 3M + 8 \quad ==> \quad M=-2 \quad ==> \quad y_p=-2$

جواب نهائی برابر خواهد بود با مجموع جواب خاص و تابع مکمل: $y_t= A(3)^t+ B(-1)^t-2$

حال شرایط اولیه $y_0=6$, $y_1=2$ را وارد می کنیم:

$$y_0= A(3)^0+ B(-1)^0-2=6$$
$$y_0= A(3)^1+ B(-1)^1-2=2$$

با حل این دستگاه دو معادله دو مجهولی $A=3$, $B=5$ خواهد شد. این اعداد را در داخل جواب عمومی قرار داده و جواب نهائی که شرایط اولیه را در نظر بگیرند بدست خواهد آمد.

$$y_t= 3(3)^t+ 5(-1)^t-2$$

۵-۳- معادله تفاضل خطی مرتبه n غیرهمگن

پیش از شروع به بیان حل معادله تفاضلی خطی غیرهمگن (با عدد ثابت) با مرتبه بیش از دو قضیه ۳ را برای حالت کلی n تعمیم می‌دهیم:

قضیه ۴

اگر w_t هر رابطه‌ای باشد که معادله همگن مرتبه nام زیر را برقرار سازد:

$$y_t= b_1y_{t-1} + b_2y_{t-2} + \ldots+ b_ny_{t-n} \quad (۵۷)$$

و همچنین z_t هر رابطه‌ای باشد که معادله غیرهمگن مرتبه nام زیر برقرار سازد:

$$y_t = b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \ldots + b_n y_{t-n} + b \qquad (۵۸)$$

در نتیجه $w_t + z_t$ نیز معادله غیرهمگن (۵۸) را برقرار می‌سازد.

اثبات: کاملاً همانند اثبات قضیه ۳ می‌باشد و به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

برای معادلاتی که در این بخش راجع به آنان صحبت خواهیم کرد شکل کلی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_n y_{t-n} = L \qquad (۵۹)$$

برای بدست آوردن تابع مکمل معادله همگن زیر را حل می‌کنیم:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_n y_{t-n} = 0 \qquad (۶۰)$$

جواب $y_t = ck^t$ را برای زمان‌های مختلف نوشته: $y_t = ck^t,\ y_t = ck^{t-1}, \ldots, y_{t-n} = ck^{t-n}$

و با جایگزینی روابط فوق در معادله (۶۰) خواهیم داشت:

$$cx^t + ca_1 x^{t-1} + ca_2 x^{t-2} + \ldots + ca_n x^{t-n} = 0$$

طرفین را بر cx^{t-n} تقسیم نموده حاصل به شکل زیر است:

$$x^n + a_1^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (۶۱)$$

پولی نومیال کرکتریستیک فوق از درجه n بوده و باید ریشه‌های آن را یافته و با استفاده از قضیه۲ تابع مکمل را بنویسیم:

$$y_c = d_1(x_1)^t + d_2(x_2)^t + \ldots + d_n(x_n)^t \qquad (۶۲)$$

که x_i برای $i=1,\ldots, n$ ریشه‌های معادله کرکتریستیک (۶۱) می‌باشند. حال باید جواب خاص را پیدا کنیم. جواب آزمایشی $y_t=M$ را در معادله کامل (۵۹) آزمایش می‌کنیم:

$$y_t = y_{t-1} = \ldots = y_{t-n} = M$$

پس از جایگزینی این روابط در (۵۹) خواهیم داشت:

$$M + a_1 M + a_2 M + \ldots + a_n M = L$$

از M فاکتور گرفته و مقدار آن را از معادله فوق حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{L}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \qquad (a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq -1)$$

به شرطی که مخرج کسر فوق صفر نشود جواب خاص را پیدا کرده‌ایم که:

$$y_p\ (=M) = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n} a_i} \qquad (\sum_{i=1}^{n} a_i \neq -1) \qquad (۶۳)$$

در صورتی که $\sum_{i=1}^{n} a_i = -1$ بود باید بجای جواب آزمایش $y_t=M$ جواب $y_t=Mt$ را بکار بریم.

پس: $y_t=Mt\ ,\ y_{t-1}=M(t-1),\ \ldots,\ y_{t-n}=M(t-n)$

با جایگزینی روابط فوق درون (۵۹) خواهیم داشت:

$$Mt+ a_1M(t-1) + a_2M(t-2) +\ldots+ a_nM(t-n)= L$$

دوباره M را محاسبه می‌کنیم: $Mt+(1+a_1+a_2+\ldots+a_n - M(a_1 + 2a_2 +\ldots+ na_n) = L$

با فرض اینکه $a_1+a_2+\ldots+a_n=-1$ است پرانتز اول برابر صفر می‌شود. بدین ترتیب مقدار M برابر است با:

$$M = \frac{-L}{a_1 + 2a + \ldots + na_n}$$

به شرط اینکه $a_1+2a_2+\ldots+na_n \neq 0$ جواب خاص را پیدا کرده‌ایم.

$$Y_p\ (=m)= \frac{-L}{1+\sum_{i=1}^{n} ia_i} \qquad (\sum_{i=1}^{n} ia_i \neq 0) \qquad (۶۴)$$

در صورتیکه مخرج کسر فوق مساوی صفر باشد ($\sum_{i=1}^{n} ia_i = 0$) باید جواب $y_t=Mt^2$ را در (۵۹) جایگزین کنیم: $y_t= Mt^2\ ,\ y_{t-1} = M(t-1)^2\ ,\ y_{t-n} = M(t-n)^2$

مانند قبل روابط فوق را در (۵۹) جایگزین می‌کنیم پس از دسته بندی جملات خواهیم داشت:

$$Mt^2(1+a_1+a_2+\ldots+a_n) + M(a_1+2^2a_2+\ldots+n^2a_n) - 2Mt(a_1+2a_2+\ldots+na_n)= L$$

پرانتز اول و پرانتز سوم هر دو برابر صفر هستند. در نتیجه: $M = \dfrac{L}{a_1 + 2^2 a_2 +\ldots+ n^2 an}$

پس جواب خاص برابر خواهد بود با:

$$y_p(= M) = \frac{L}{\sum_{i=1}^{n} i^2 a_i} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = -1 \qquad \sum_{i=1}^{n} ia_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i \neq 0 \qquad (۶۵)$$

در صورتی که باز هم $\sum_{i=1}^{n} i^2 a_i = 0$ شد باید جواب آزمایشی $y_t= Mt^3$ را امتحان کنیم باز اگر مخرج کسر نهائی برابر با صفر شد، جواب $y_t=Mt^4$ و اگر موضوع ادامه داشت و محاسبات

شکست خورد این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به جواب برسیم بالاخره جواب $y_t=Mt^n$ حتماً تفاضل مرتبه nام را برقرار می‌سازد. با پیدا کردن جواب خاص جواب عمومی را می‌نویسیم:

$$y_t= y_c+ y_p$$
$$y_t=d_1(x_1)^t+ d_2(x_2)^t +\ldots+ d_n(x_n)^t + y_p$$

در این مرحله شرایط اولیه $y_0=c_0$, $y_1=c_1$, … , $y_{n-1}=c_{n-1}$ را وارد می‌کنیم تا ضرائب d_1 تا d_n را محاسبه کنیم و جواب نهائی را با توجه به شرایط اولیه مسئله بدست آوریم.

$$y_0= d_1 (x_1)^0 + d_2 (x_2)^0 +\ldots+ d_n (x_n)^0 + y_p = c_0$$
$$y_1= d_1 (x_1)^1 + d_2 (x_2)^1 +\ldots+ d_n (x_n)^1 + y_p = c_1$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1}= d_1 (x_1)^{n-1} + d_2(x_2)^{n-1} +\ldots+ d_n (x_n)^{n-1} + y_p = c_{n-1}$$

از حل دستگاه n معادله n مجهولی فوق می‌توان مقادیر d_1 تا d_n را محاسبه نمود. لازم به تذکر است که فرض کردیم که معادله کرکتریستیک (۶۱) دارای n ریشه حقیقی و متمایز می‌باشد. در صورتی که (۶۱) دارای ریشه‌های مضاعف یا مختلط باشد روش حل را باید عوض کرد.

تمرین ۶

۱- معادلات تفاضلی زیر را حل کنید:

1- $y_t= 5y_{t-1} -8$ $\quad y_0=5$
2- $y_{t+1}+ 3y_t=4$ $\quad y_0= 4$
3- $2y_{t+1} -y_t= 2$ $\quad y_0= 7$
4- $y_{t+1} = 0.2y_t+8$ $\quad y_0=1$

۲- معادلات تفاضلی زیر را حل کنید:

1- $y_t= 6y_{t-1} - 8y_{t-2} -9$ $\quad y_0=5 , y_1= 19$
2- $y_t= 3y_{t-1} + 10y_{t-2} - 12$ $\quad y_0= 9 , y_1= -1$
3- $y_t= 4y_{t-2} + 90$ $\quad y_0= -32 , y_1= -14$

۳- جواب خاص را در معادلات زیر بیابید:

1- $y_t= 4y_{t-1} - 3y_{t-2} + 5$
2- $y_t= -7y_{t-1} + 8y_{t-2} -3$
3- $y_t= -7y_{t-1} - 8y_{t-2}-3$
4- $y_t= 3y_{t-1} - 3y_{t-2} +y_{t-3} + 6$

۴- چرا روش ارائه شده در این قسمت قادر به حل معادله زیر نیست؟

$y_t= 4y_{t-1} -3y_{t-2} + 5$

۶- نقش ریشه‌ها در معادلات تفاضلی خطی

همانطور که قبلاً توضیح داده شد ممکن است معادله پولی نومیال (۶۱) دارای n ریشه متمایز نباشد و یا اینکه دارای ریشه‌های مختلط باشد. حالاتی از این قبیل باعث شکست خوردن روش توضیح داده شده در قبل خواهد شد.

۶-۱- ریشه‌های مضاعف

برای اینکه روشن شود که وقتی ریشه‌های معادله پولی نومیال کرکتریستیک (۶۱) مضاعف باشند، چه اشکالی در حل معادله تفاضلی مربوطه پیدا می‌شود به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۶-۱

معادله تفاضلی $y_t= 4y_{t-1}-4y_{t-2}$ با شرایط اولیه $y_1=6$, $y_0=5$ حل می‌کنیم. برای پیداکردن جواب $y_t=x^t$ را در معادله فوق جایگزین می‌کنیم و پولی نومیال کرکتریستیک مربوطه را بدست می‌آوریم: $x^2 -4x + 4= 0$

در این حالت $x'=x''=2$ به دو ریشه مضاعف می‌رسیم. برای پیدا کردن جواب، در معادله تفاضلی: $y_t = A(x')^t + B(x'')^t$

با توجه به شرایط اولیه باید: اعداد B,A را طوری تعیین کنیم که:

$$y_0= A(2)^0 + B(2)^0= 5 \quad ==> \quad A+B=5$$
$$y^1= A(2)^1 + B(2)^1= 6 \quad ==> \quad A+B=3$$

واضح است که در دستگاه معادلات فوق A+B نمی‌تواند هم مساوی ۵ باشد و هم مساوی ۳ باشد. بدین ترتیب مقادیر B,A را نمی‌توانیم پیدا کنیم و اگر این راه حل را انتخاب کنیم معادله تفاضلی مورد نظر بدون جواب می‌ماند. در مورد معادلات تفاضلی مرتبه‌های بالاتر نیز این موضوع براحتی اتفاق می‌افتد. فرض کنید M ریشه یک معادله کرکتریستیک مرتبهٔ nام مساوی همدیگر باشند، بنابراین $x_1=x_2=...=x_m$ و بدین ترتیب دستگاه معادلات (۶۶) یک دستگاه n معادله با n-m+1 مجهول خواهد بود که جواب مشخص نخواهد داشت.

قضیه ۵

اگر معادله کرکتریستیک یک معادله تفاضلی مرتبه دوم دارای ریشه مضاعف $(x'= x'')$ باشد، $y_t= (x')^t$ در آن صدق می‌کند و در نتیجه $y_t= t(x')^t$ نیز در آن معادله صادق خواهد بود.

اثبات: اگر $x^2 + bx+c=0$ دارای دو ریشه مضاعف باشد:

$$x''= x'= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2} \implies b^2= 4c \implies x'= x''= -\frac{b}{2}$$

از آنجائی که $c=\frac{b^2}{4}$ است معادله مرتبه دوم فوق باید به شکل $x^2 +bx+\frac{b^2}{4} = 0$ باشد:

بدین ترتیب معادله تفاضلی که معادله کرکتریستیک آن معادله درجه دوم فوق باشد دارای شکل کلی زیر است: $y_t = -by_{t-1} - \frac{b^2}{4} y_{t-2}$

لازم به تذکر است که در اینجا عدد ثابت را در نظر نگرفته‌ایم چون معادله خلاصه شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای اینکه نشان دهیم $t(x')^t = t(-b/2)^t$ معادله تفاضلی فوق را برقرار می‌سازد باید ثابت کنیم که: $y_t= t(-b/2)^t = -by_{t-1}-(b^2/4)\, y_{t-2}$

می‌دانیم سمت راست این معادله برابر است با: $-b(-\frac{b}{2})^{t-1}(t-1)-\frac{b^2}{4}(-\frac{b}{2})^{t-2}(t-2)=t(-\frac{b}{2})^t$

و بدین ترتیب $y_t = t(-\frac{b}{2})^t$ معادله تفاضلی ما را برقرار خواهد ساخت.

همانند روش فوق می‌توان نشان داد اگر m ریشه از n ریشه معادله کرکتریستیک درجه nام یک معادله تفاضلی مرتبه nام مضاعف و برابر a باشند، جملات زیر در آن معادله تفاضل صدق می‌نماید: $a^t , ta^t , t^2a^t , \dots , t^{m-1}a^t$

قضیه ۶

اگر معادله کرکتریستیک یک معادله تفاضلی مرتبه دوم دارای دو ریشه مضاعف $x'=x''=a$ باشد جواب زیر نیز در آن صدق خواهد کرد: $y_t= Aa^t + Bta^t$

اثبات: با کمی تعمق در قضیه ۵ و قضیهٔ ۱ براحتی این موضوع را می‌توان فهمید. چون این قضیه یک حالت خاص (قضیه۵) از قضیه ۱ می‌باشد.

متشابهاً یک جواب معادله تفاضلی مرتبه nام که دارای m ریشه مضاعف باشد به شکل زیر است: $y_t= b_1a^t + b_2ta^t + b_3t^2a^t +\dots+ b_mt^{m-1}a^t + b_{m+1}(x_{m+1})^t + \dots+ b_n(x_n)^t$

که: $x_1= x_2 =\dots=x_m=a$ و $b_1,b_2,\dots,b_n$ اعداد ثابت دلخواه می‌باشند. نتیجه فوق به حالتی که چندین دسته ریشه مضاعف داشته باشیم نیز به راحتی قابل تعمیم است:

نتیجه ۳

اگر معادله پولی نومیال کرکتریستیک یک معادله تفاضلی مرتبه nام دارای p دسته ریشه مضاعف باشد جواب آن به شکل زیر خواهد بود:

$$y_t= [b_1a_1{}^t+b_2ta^t{}_1+\ldots+bm_1{}^{t\ \ m}{}_1{}^{-1}a^t{}_1]+[b_{(m_{1+1})}a_2{}^t+b_{(m1+2)}ta_2{}^t+\ldots+b_{(m1+m2)}t^{\ m2-1}a_2{}^t] +\ldots+$$
$$[b_{(m1+\ldots+mp-1\,+1)}a^tp +b_{(m1+\ldots+mp-1\,+2)}ta_p{}^t +\ldots+ b_{(m1+\ldots+\,mp)}t^{p-1}a^t{}_p]$$
$$+ b_{(m1+\ldots+\,mp\,+\,1)}(x_{(m1+\ldots+mp+1)})^t+\ldots+ b_n(x_{(n)})^t+ y_p$$
$$x_{(1)}= \ldots = x_{(m1)}$$
$$x_{(m1+1)} = \ldots = x_{(m1+m2)}$$
....
$$x_{(m1+\ldots+mp-1\,+1)}= \ldots = x_{(m1+\ldots+mp)}$$
$$x_{(m1+\ldots+mp\,+1)}\ ^1\ \ldots\ ^1\ x_n$$

که b_1 تا b_n اعداد ثابت دلخواه و y_p جواب خاص معادله غیرهمگن می‌باشند.

مثال ۶–۲

با استفاده از (۶۷) مثال ۶–۱ را حل می‌کنیم. در مثال ۶–۱ داشتیم:

$$y_t = 4\,y_{t-1}{}^{-}4^{y}{}_{t-2} \qquad y_0 = 5 \qquad y_1= 6$$

و همچنین پیدا کردیم که ریشه‌های معادله کرکتریستیک معادله فوق برابرند با x'=x"=2.

معادله (۶۷) را برای این مثال تشکیل می‌دهیم: $y_t = A(2)^t + Bt(2)^t$

برای پیدا کردن مقادیر B , A که شرایط اولیه را برقرار سازند باید:

$$\begin{cases} y_0 = A(2)^0 +B(0)(2)^5 = 5 \\ y_1 = A(2)^1 + B(1)(2)^1= 6 \end{cases} \quad ==> A=2,\ B=-2$$

نهایتاً جواب معین برابر است با: $y_t = 5(2)^t - 2t(2)^t$

مثال ۶–۳

معادله تفاضلی $y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + 12$ را با شرایط اولیه $y_0 = 5$, $y_1 = 9$ حل می‌کنیم. اول تابع مکمل را تشکیل می‌دهیم و با قرار دادن $y_t = x^t$ پولی‌نومیال کرکتریستیک آنرا به دست آورده و ریشه‌های آنرا حساب می‌کنیم: $y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2}$

$$x^2 - 2x + 1= 0 \qquad ==> \qquad x' = x''=1$$

چون دو ریشه مضاعف داریم با استفاده از (۶۷) تابع مکمل را می‌نویسیم:

$$y_c = A(1)^t + Bt(1)^t = a+b_t$$

چون معادله تفاضلی ما غیرهمگن می‌باشد احتیاج به جواب خاص هم داریم. جواب y_t =M را آزمایش می‌کنیم:

$M= 2M -M+12 \quad ==> \quad 12=0$ نمی‌تواند باشد

پس جواب $y_t = Mt$ را آزمایش می‌کنیم.

$Mt = 2m(t-1)- m(t-2)+12 \quad ==> \quad 12=0$ قابل قبول نیست

پس جواب آزمایشی $y_t = Mt$ نمی‌تواند قابل قبول باشد. جواب $y_t = Mt^2$ را آزمایش می‌کنیم:

$Mt^2 = 2M(t-1)^2 – M(t-2)^2+12 \quad ==> \quad M=6$

بنابراین جواب خاص برابر خواهد بود با: $y_p = Mt^2 = 6t^2$

جواب عمومی که برابر است با مجموع جواب خاص و تابع مکمل به شکل زیر می‌شود:

$y_t = A+Bt+6t^2$

برای اینکه شرایط اولیه را وارد کنیم باید:

$$\begin{cases} y_0 = A+B(0)+6(0)^2 = 5 \\ y_1 = A+B(1)+6(1)^2 = 9 \end{cases} \quad ==> A=5,\ B=-2$$

بدین ترتیب جواب نهائی برابر است با: $y_t= 5-2t+6t^2$

۶-۲- ریشه‌های موهومی و مختلط

زمانی که ریشه‌های معادله پولی نومیال کرکتریستیک (۶۱) موهومی یا مختلط باشند، اشکالاتی در حل معادله تفاضلی مربوطه پیدا خواهد شد. برای روشن شدن این موضوع مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۶-۴

معادله تفاضلی $t_t = 2y_{t-1} - 5y_{t-2}$ را در نظر بگیرید. برای حل این معادله جواب $y_t=x^t$ را آزمایش می‌کنیم: $x^t=2x^{t-1}–5x^{t-2} \quad ==> \quad x^2–2x+5=0 \quad ==> \quad x',x''=1+2\sqrt{-1}$

با جایگزینی x',x'' در $y_t=A(x')^t+B(x'')^t$ خواهیم داشت:

$y_t=A(1+2\sqrt{-1})^t+B(1-2\sqrt{-1})^t$

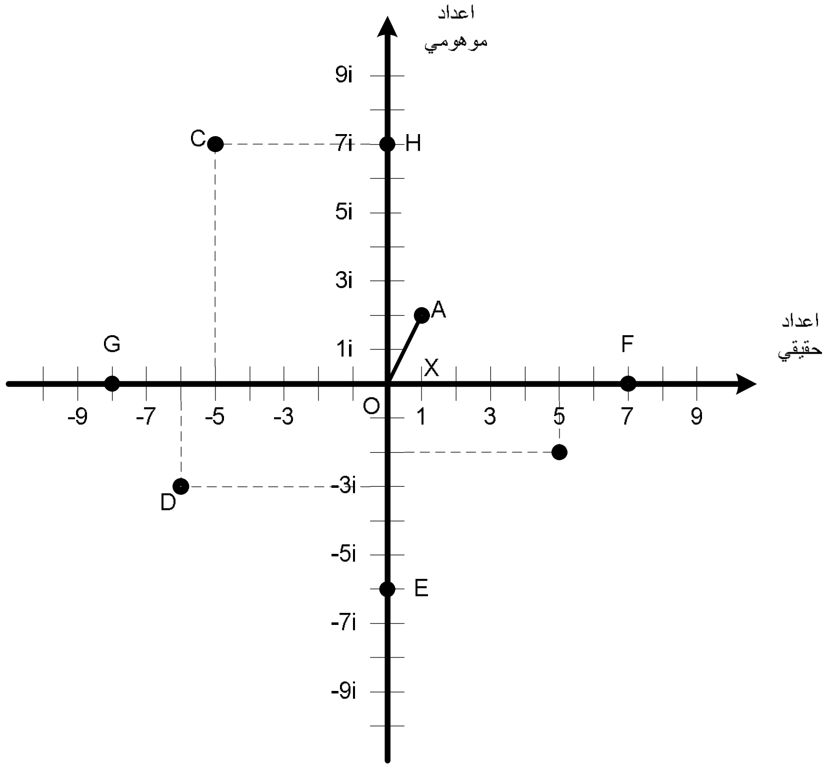
$\sqrt{-1}$ را چگونه می‌توان تفسیر نمود؟ طبق تعریف $\sqrt{-1}$ عددی است که وقتی خودش ضرب شد برابر با ۱- می‌شود. یا به عبارت دیگر اگر $i=\sqrt{-1}$ باشد، $i^2 = -1$ می‌شود. واضح است که هر عددی از اعداد حقیقی به توان دو برسد اگر منفی یا مثبت باشد مثبت خواهد شد و اگر صفر باشد باز بعد از به توان رسانیدن دوباره برابر با صفر خواهد بود. پس چگونه باید i را تعبیر کنیم؟

۶-۲-۱- اهداف موهومی و مختلط

اعدادی از قبیل $\sqrt{-1}$, $3\sqrt{-1}$ را اعداد موهومی نامگذاری می‌کنیم اگر $\sqrt{-1}$ را

مساوی i تعریف کنیم $i \equiv \sqrt{-1}$ اعداد i و $\frac{3i}{2}$ و 4i نیز همه اعداد موهومی خواهند بود. اگر اعداد موهومی همراه با یک عدد حقیقی باشند تشکیل اعداد مختلط را خواهند داد. برای مثال 2i+3 و $-2+3\sqrt{-1}$ از اعداد مختلط هستند. برای اینکه تعبیر اعداد مختلط را بدانیم تصویر ۶-۱ را در نظر بگیرید.

در تصویر ۶-۱ محور افقی اعداد حقیقی را نشان می‌دهد و محور عمودی اعداد موهومی را. نقطه A را با طول یک و عرض 2i در تصویر مذکور نشان می‌دهیم. نقطه A بیانگر عدد مختلط 1+2i خواهد بود. همینطور اعداد 5-2i و -5+6i و -6-3i به ترتیب توسط نقاط B و C و D نشان داده شده است. اعداد 0-6i و 7-0i و -8+0i و 0+7i نیز که از حالات خاص می‌باشند به ترتیب توسط نقاط E , F , G , H بیان گردیده‌اند. قبل از اینکه بتوانیم این تفسیر هندسی را مورد استفاده قرار دهیم باید چند نکته مثلثاتی را یادآوری کنیم.



تصویر ۶-۱

قضیه ۷ (قضیه دوموآور)

اگر $i=\sqrt{-1}$ باشد و $y = a(\text{Cos } Q + i \text{ Sin } Q)$ در نتیجه:

$$y^n = a^n[\text{ Sin}(nQ) + i \text{ Sin}(nQ)] \qquad (۶۸)$$

اثبات: اگر عددی مانند m-1 وجود داشته باشد که برای آن فرمول y^{m-1} صادق باشد، نتیجه می‌گیریم که فرمول برای عددی که یک واحد از m-1 بزرگتر باشد (m) نیز صادق خواهد بود:

$$y^m = y^{m-1}\, y = \{a^{m-1} \text{Cos}[(m-1)Q] + a^{m-1} i \text{ Sin } [(m-1)Q]\}(a \text{ Cos } Q + a \text{ Sin } Q)$$
$$= a^m \text{ Cos}[(m-1)Q]\text{Cos}Q + a^m i \text{ Cos}[(m-1)Q]\text{Sin}Q + a^m i \text{ Sin}[(m-1)Q]\text{Cos } Q$$
$$+ a^m i^2 \text{ Sin}[(m-1)Q]\text{Sin}Q$$

می‌دانیم که: $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$. از $a^m i$, a^m فاکتور می‌گیریم:

$$y^m = a^m \{\text{Cos } [(m-1)Q] \text{ Cos } Q- \text{ Sin } [(m-1)Q] \text{ Sin } Q\} +$$
$$a^m i \{\text{Cos}[(m-1)Q] \text{ Sin}Q + \text{Sin}[(m-1)Q]\text{Cos } Q\}$$

با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی زیر:

$$\text{Cos}\,(a+b) = \text{Cos}\,a\ \text{Cos}\,b - \text{Sin}\,a\ \text{Sin}\,b$$
$$\text{Sin}\,(a+b) = \text{Cos}\,a\ \text{Sin}\,b + \text{Sin}\,a\ \text{Cos}\,b$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$y^m = a^m \text{ Cos } (mQ) + a^m i \text{ Sin } (mQ)$$

بنابراین اگر فرمول ما برای عدد m-1 برقرار باشد، برای عدد صحیح بزرگتر بعدی آن (m) نیز صادق خواهد بود. ولی می‌توان نشان داد که فرمول مورد نظر برای n=1 نیز صادق است:

$$A^n \text{ Cos } (nQ) + a^n i \text{ Sin } (nQ)= a \text{ Cos } Q + a\, i \text{ Sin } Q = y$$

از چیزی که ثابت شده می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر فرمول فوق برای n=1 صادق باشد باید برای n=2 هم صادق باشد و اگر برای n=2 صادق است برای عدد بعدی n=3 نیز صادق می‌باشد و الی آخر. بدین ترتیب برای هر عدد صحیح بزرگتر از یک صادق خواهد بود.

۶-۲-۲- بیان مثلثاتی اعداد مختلط

با توجه به تصویر ۶-۱ از مبدأ خطی به نقطه A که بیانگر عدد 1+2i می‌باشد وصل می‌کنیم زاویه‌ای که OA با محور افقی در جهت مثبت محور مزبور ایجاد می‌کند را Q و تصویر نقطه A را روی محور افقی X می‌نامیم. بدین ترتیب:

$$\text{Cos } Q= \frac{OX}{OA} = \frac{1}{OA} \quad ==> \quad OA \text{ Cos } Q = OX=1$$

و همینطور:

$$\text{Sin } Q= \frac{XA}{OA} = \frac{2}{OA} \quad ==> \quad OA \text{ Sin } Q = XA =2$$

پس: $1+2i = OA \, Cos\, Q + OA\, i\, Sin Q$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورث در مثلث OXA داریم:

$$OA= \sqrt{(OX)^2+(AX)^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

پس: $1+2i= \sqrt{5}\,(Cos\, Q + i \sin Q)$

بطور کلی هر عدد مختلط c+di را می‌توانیم به شکل زیر نشان دهیم:

$$c+di = \sqrt{c^2+d^2}\,(Cos\, R + i\, Sin\, R)$$

که R زاویه‌ای است که:

$$SinR\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} \;,\; CosR\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$\sqrt{c^2+d^2}$ را مودول عدد مختلط c+di و عدد مختلط c-di را مزدوج مختلط عدد c+di می‌نامند. بنابراین 1-2i مزدوج مختلط 1+2i می‌باشد. عدد c-di را با روش مشابه قبل می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$c-di=\sqrt{c^2+(-d)^2}\,(Cos\, S+ i\, Sin\, S)=\sqrt{c^2+d^2}\,(Cos\, S + i\, Sin\, S)$$

که:

$$CosS\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} = CosR \qquad SinS\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} = SinR$$

نهایتاً یک عدد مختلط و مزدوج مختلط آنرا می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$c+di = \sqrt{c^2+d^2}\,(Cos\, R+ i\, Sin\, R) \quad (۶۹)$$

$$c-di = \sqrt{c^2+d^2}\,(Cos\, R- i\, Sin\, R) \quad (۷۰)$$

$$CosR\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} \quad (۷۱)$$

$$SinR\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}} \quad (۷۲)$$

۶-۲-۳- حل معادلات تفاضلی با ریشه‌های مختلط

مزدوج عدد مختلط c+di را با c-di و مُدول آن را با $D\equiv\sqrt{c^2+d^2}$ مشخص می کنیم.

همانطور که در مثال ۶-۴ نشان داده شد در حل معادله مثال مزبور به جواب زیر رسیدیم:

$$y_t = A(1+2\sqrt{-1}\,)^t + B(1-2\sqrt{-1}\,)^t$$

به عبارت کلی‌تر جواب می‌تواند به این شکل باشد: $y_t = A(c+di)^t + B(c-di)^t$

با جایگزینی (۶۹) و (۷۰) در معادله فوق:

$y_t = A[D(\text{Cos } R + i \text{ Sin } R)]^t + B[D(\text{Cos } R - i \text{ Sin } R)]^t$

با استفاده از قضیه دوموآور (قضیه ۷) داخل هرکدام از کروشه‌ها را می‌توانیم به شکل زیر بسط دهیم:

$y_t = AD^t [\text{Cos}(tR) + i \text{ Sin}(tR)] + BD^t [\text{Cos}(tR) - i \text{ Sin}(tR)]$

با ضریب کردن A , B درون کروشه‌ها و فاکتورگیری از D^t:

$y_t = D^t [(A+B) \text{ Cos}(tR) + i(A-B) \text{ Sin}(tR)]$

چون A , B هر دو اعداد دلخواه هستند می‌توانیم تعریف کنیم: $i(A-B) = F\ ,\quad A+B = E$

که E , F می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند. پس:

$$y^t = D^t[E \text{ Cos}(tR) + F \text{ Sin}(tR)] \qquad (۷۳)$$

به عبارت کلی‌تر:

<u>نتیجه ۴</u>

جواب معادله تفاضلی مرتبه دوم با ریشه‌های مختلط c+di و c-di به شکل زیر است:

$$y_t = (\sqrt{c^2 + d^2}\,)^t [E \text{ Cos}(tR) + F \text{ Sin}(tR)] + y_p$$

که y_p جواب خاص معادله تفاضلی غیرهمگن می‌باشد. مقادیر E , F باید با توجه به شرایط اولیه پیدا شوند. وقتی یک ریشه موهومی یا مختلط باشد ریشه دیگر مزدوج مختلط آن خواهد بود.

چون پولی‌نومیال کرکتریستیک درجه دوم $x^2+ax+b=0$ دارای ریشه‌های زیر می‌باشد:

$$x', x'' = \frac{-a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

اگر $-g = a^2 - 4b < 0$ باشد داریم:

$$x', x'' = \frac{-a}{2} \pm \frac{\sqrt{g}}{2} i$$

که هر دو مزدوج مختلط یکدیگر می‌باشند. همچنین در معادلات مرتبه‌های بالاتر نیز ریشه‌های مختلط به صورت جفت‌های مزدوج ظاهر خواهند شد.

<u>نتیجه ۵</u>

جواب معادله تفاضلی مرتبه n با دو ریشه مختلط $x_1=c+di$, $x_2=c-di$ به شکل زیر است:

$$y_t = (\sqrt{c^2 + d^2}\,)^t [b_1 \text{ Cos}(tR) + b_2 \text{ Sin}(tR)] + b_3 x_4^t + \dots + b_n x_n^t + y_p$$

که b_1 , b_2 , … , b_n اعداد ثابت دلخواه هستند که با توجه به شرایط اولیه محاسبه خواهند شد. مقدار y_p جواب خاص معادله تفاضلی غیرهمگن می‌باشد.

نتیجه ۶

جواب معادل تفاضلی مرتبه nام که شامل m جفت ریشه مختلط

$x_1 = c_1+d_1i \quad , \ldots\ldots , \quad x_{2m-1} = c_m-d_mi$
$x_2 = c_1- d_1i \quad , \ldots\ldots , \quad x_{2m} = c_m-d_mi$

باشد به شکل زیر خواهد بود:

$$y_t= (\sqrt{c_1^2+d_1^2})^t\,[b_1 \,Cos\,(tR_1) +b_2 \,Sin\,(tR_1)] + \ldots +$$
$$(\sqrt{c_m^2+d_m^2})^t\,[b_{2m-1}\,Cos\,(tR_m)+ b_{2m}\,Sin\,(tR_m)] + b_{2m+1}\,x^t_{2m+1} + \ldots + bn\,x_n^t + y_p$$

نتیجه ۷

جواب معادله تفاضلی مرتبه nام که شامل m+l جفت ریشه که l جفت ریشه مختلط آن مضاعف می‌باشند به شکل زیر خواهد بود:

$$y_t = (\sqrt{c_1^2+d_1^2})^t\,[\, b_1\,Cos\,(tR_1)+ b_2\,Sin\,(tR_1)]+ \ldots+$$
$$(\sqrt{c^2m+ d^2m})^t\,[b_{2m-1}\,Cos\,(tR_m) + b_{2m}\,Sin\,(tR_m)]+$$
$$t^{0(}\sqrt{c_{m+1}^2+d_{m+l}^2}\,)[b_{2m+1}\,Cos\,(tR_{m+1}) +b_{2m+2}\,Sin\,(tR_{m+1})] + \ldots+$$
$$t^{l-1}(\sqrt{c_{m+l}^2+d_{m+l}^2}\,)[b_{2m+2l-1}Cos\,(tR_{m+1}) + b_{(2m+2l)}\,Sin\,(tR_{m+1})]+$$
$$b_{2m+2l+1}\,x^t_{2m+2l+1} + \ldots+ x_n^t + y_p$$

که:

$x_1 = c_1+d_1i \quad , \ldots\ldots , \quad x_{2m-1} = c_m-d_mi$
$x_2 = c_1- d_1i \quad , \ldots\ldots , \quad x_{2m} = c_m-d_mi$
$x_{2m+1} = x_{2m+3} = x_{2m+5} = \ldots = x_{2m+2l-1}= c_{mt1}+ d_{m+1}i$
$x_{2m+2} = x_{2m+4}= x_{2m+6} = \ldots = x_{2m+2l} = c_{m+1-dm+1}i$

مثال ۶-۵

معادله تفاضلی $y_t = -y_{t-2}+12$ را با شرایط اولیه $y_0= 11 , y_1= 5$ حل کنید.

اول جواب خاص را پیدا می‌کنیم $y_t=M$ را آزمایش می‌کنیم:

$M= -M+12 \quad ==> \quad M=6 \quad ==> \quad y_p= 6$

حالا تابع مکمل را از معادله همگن به دست می‌آوریم: $y_t = -y_{t-2}$

$y_t= x^t$ را جایگزین می‌کنیم: $x^t = -x^{t-2} \;==>\; x^2= -1 \quad x' =+ti\,,\, x''=-ti$

داشتیم: $y_c = D^t[E\,Cos\,(tR) + F\,Sin\,(tR)]$

که: $D=\sqrt{0^2+1^2}=1$

با استفاده از (۷۱) و (۷۲): $Sin\ R = \frac{1}{D} = 1\ ,\ Cos\ R = \frac{0}{D} = 0$

می‌دانیم که زاویه‌ای که سینوس آن یک است و یا کسینوس آن برابر با صفر است مساوی ۹۰ درجه یا $\pi/2$ رادیان می‌باشد پس: $Arc\ Sin\ (1) = \pi/2 = Arc\ Cos\ (0)$

پس با استفاده از (۷۳): $y_c = (E\ Cos\ (t\ \pi/2) + F\ Sin\ (t\ \pi/2)]$

جواب عمومی به شکل زیر خواهد بود: $y_t = E\ Cos\ (t\pi/2) + F\ Sin\ (t\pi/2) + 6$

جواب نهائی را با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آوریم:

$y_0 = E\ Cos\ (0) + F\ Sin\ (0) + 6 = 11$

$y_1 = E\ Cos\ (\pi/2) + F\ Sin\ (\pi/2) + 6 = 5 \quad ==> E = 5\ ,\ F = -1$

پس جواب نهائی به این شکل خواهد بود: $y_t = 5\ Cos\ (t\pi/2) - Sin\ (t\pi/2) + 6$

مثال ۶-۶

معادله تفاضلی $y_t = -6y_{t-1} - 25y_{t-2} + 64$ را با شرایط اولیه $y_0 = 7\ ,\ y_1 = -21$ حل کنید.

حل: جواب خاص را پیدا می‌کنیم: $(y_t = m)$ $\quad M = -6m - 25m + 64 \quad ==> m=2$

تابع مکمل را پیدا می‌کنیم: $(y_t = x^t)$

$x^t = -6x^{t-1} - 25x^{t-2} \quad ==> \quad x^2+6x+25 = 0 \quad ==> \quad x', x'' = -3\pm4i$

$y_c = (\sqrt{3^2+4^2})^t\ [E\ Cos\ (tR) + F\ Sin\ (tR)]$

$$CosR = \sqrt{\frac{c}{c^2+d^2}} = \sqrt{\frac{-3}{3^2+4^2}} = -0.6\ ,\ SinR = \sqrt{\frac{d}{c^2+d^2}} = \sqrt{\frac{4}{3^2+4^2}} = 0.8$$

زاویه R را پیدا می‌کنیم. چون زاویه R دارای سینوس مثبت و کسینوس منفی می‌باشد باید در ربع دوم دایره مثلثاتی باشد یعنی $\pi/2 < R < \pi$ رادیان یا $90^o < R < 180^o$ باشد پس:

$Cos\ R = -0.6 \qquad -Cos\ R = 0.6$

$Cos\ (180^o - R) = -Cos\ R = 0.6 \quad Arc\ Cos\ (0.6) = (180^o - R)$

$53.1301\ ^o = 180^o - R \quad ==> \quad R = 126.8699\ ^o$

ولی می‌دانیم سینوس کمانی برابر یک مقدار مثبت است که یا در ربع اول یا ربع دوم دایره مثلثاتی باشد. از این میان چون کسینوس آن زاویه منفی است ربع دوم را انتخاب می‌کنیم. یعنی:

$ArcSin(0.8) = 53.1301^o ==> Sin(52.1301^o) = Sin(180^o - 53.1301^o) = Sin(126.8699^o)$

پس جواب عمومی مسئله ما به شکل زیر خواهد بود:

$y_t = 5^t\ [ECos\ (126.8699t) + F\ Sin\ (126.8699t)] + 2$

برای پیدا کردن جواب نهائی، F , E را بدست می‌آوریم.

$y_0 = 5^0[ECos(0)+FSin(0)]+2=7, \quad y_1 = 5^1[ECos(126.8699)+FSin(126.8699)]+2=-21$

بالاخره: $y_t = 5^t\,[5\,Cos\,(126.8699t) - 2\,Sin\,(126.8699t) + 2$

نتیجه ۸

اگر معادله پولی‌نومیال کرکترستیک یک معادله تفاضلی مرتبه nام دارای p دسته ریشه مضاعف و q جفت ریشه مختلط و تعدادی ریشه حقیقی باشد دارای جوابی به شکل زیر خواهد بود:

$$y_t = [\,b_1a_1^t + \dots + b_{m1}t^{m1-1}a_1^t] + [b_{(m1+1)}a_2^t + \dots + b_{(m1+m2)}t^{m2-1}\,a_2^t] + \dots +$$
$$[b_{(m1+\dots+mp-1+1)}\,a_p^t + \dots + b_{(m1+\dots+mp)}t^{p-1}\,a_p^t] +$$
$$(\sqrt{c_1^2 + d_1^2}\,)^t\,[b_{(m1+\dots+mp+1)}Cos\,(tR_1) + b_{(m1+\dots+mp+2)}\,Sin\,(tR_1)] + \dots +$$
$$(\sqrt{c^2{}_q + d^2{}_q}\,)^t\,[b_{(m1+\dots+mp+2q-1)}\,Cos\,(tR_q) + b_{(m1+\dots+mp+2q)}\,Sin\,(tR_q)] +$$
$$b_{(m1+\dots+mp+2q+1)}\,x^t_{(m1+\dots+mp+2q+1)} + \dots + x_n^t + y_p$$

این نتیجه از ترکیب نتیجه ۳ و ۶ بدست آمده است که در آن:

$$x_{(1)} = \dots = x_{(m1)}$$
$$x_{(m1+1)} = \dots = x_{(m1+m2)}$$
$$\vdots$$
$$x_{(m1+\dots+mp-1+1)} = \dots = x_{(m1+\dots+mp)}$$
$$x_{(m1+\dots+mp+1)} = c_1 + d_1 i$$
$$x_{(m1+\dots+mp+1)} = c_1 - d_1 i$$
$$\vdots$$
$$x_{(m1+\dots+mp+2q-1)} = c_q + d_q i$$
$$x_{(m1+\dots+mp+2q)} = c_q - d_q i$$

نتیجه ۹

نتیجه ۷ را به حالتی بسط می‌دهیم که l جفت ریشه مختلط مضاعف داشته باشیم:

$$y_t = [\,b_1a_1^t + \dots + b_{m1}t^{m1-1}a_1^t] + [b_{(m1+1)}a_2^t + \dots + b_{(m1+m2)}t^{m2-1}\,a_2^t] + \dots +$$
$$[b_{(m1+\dots+mp-1+1)}\,a_p^t + \dots + b_{(m1+\dots+mp)}t^{p-1}\,a_p^t] +$$
$$(\sqrt{c_1^2 + d_1^2}\,)^t\,[b_{(m1+\dots+mp+1)}Cos\,(tR_1) + b_{(m1+\dots+mp+2)}\,Sin\,(tR_1)] + \dots +$$
$$(\sqrt{c^2{}_q + d^2{}_q}\,)^t\,[b_{(m1+\dots+mp+2q-1)}\,Cos\,(tR_q) + b_{(m1+\dots+mp+2q)}\,Sin\,(tR_q)] +$$
$$t^0(\sqrt{c_{q+1}^2 + d_{q+1}^2}\,)[b_{(m1+\dots+mp+2q+1)}\,Cos\,(tR_{q+1}) + b_{(m1+\dots+mp+2q)}\,Sin\,(tR_{q+1})] + \dots +$$
$$t^{l-1}(\sqrt{c_{q+1}^2 + d_{q+1}^2}\,)[b_{(m1+\dots+mp+2q+2l-1)}\,Cos\,(tR_{q+1}) + b_{(m1+\dots+mp+2q+2l)}Sin(tR_{q+1})] +$$
$$b_{(m1+\dots+mp+2q+1)}\,x^t_{(m1+\dots+mp+2q+1)} + \dots + x_n^t + y_p$$

۳-۶- معادلات تفاضل خطی (روش توابع مولّد)

تابع مولد برای y_t به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$G(p) = \sum_{t=0}^{\infty} y_t\,p_t \qquad (۷۴)$$

با تابع مولد معادله تفاضلی خطی را می‌توان حل کرد. مثال زیر روش را نشان می‌دهد.

مثال ۶-۷

معادله تفاضلی $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$ را با شرایط اولیه $y_0 = 2$, $y_1 = 3$ حل کنید.

برای حل معادله فوق آنرا در p^t ضرب می‌کنیم و از سمت چپ آن $\sum_{t=0}^{\infty}$ می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\sum_{t=0}^{\infty} y_{t+2}p^t - 3\sum_{t=0}^{\infty} y_{t+1}p^t + 2\sum_{t=0}^{\infty} y_t p^t = 0$$

یا به عبارت دیگر: $(y_2+y_3p+y_4p^2+\dots)-3(y_1+y_2p+y_3p^2+\dots)+2(y_0+y_1p+y_2p^2+\dots)=0$

عبارت فوق را بر حسب تابع مولد (۷۴) می‌نویسیم:

$$\frac{G(p)-y_0-y_1p}{p} -3\left(\frac{G(p)-y_0}{P}\right) + 2\,G(P)= 0$$

مقادیر اولیه $y_0 = 2$, $y_1 = 1$ را در معادله فوق گذاشته و $G(p)$ را بدست می‌آوریم.

$$G(p)= \frac{2-3p}{1-3p+2p^2} = \frac{2-3p}{(1-p)(1-2p)}$$

رابطه فوق را به شکل زیر تجزیه می‌کنیم:

$$G(p)=\frac{1}{1-p}+\frac{1}{1-2p}=(1+p+p^2+\dots)+(1+2p+(4p)^2+\dots)$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty} p^t + \sum_{t=0}^{\infty}(2p)^t = \sum_{t=0}^{\infty}(1+2^t)p^t$$

پس جواب معادله تفاضلی مربوطه از قرار زیر خواهد بود: $y_t = 1+2^t$

تمرین ۷

۱- معادلات تفاضلی زیر را حل کنید.

1- $y_t = -6y_{t-1} - 9y_{t-2}$
2- $y_t = 10y_{t-1} - 25\, y_{t-2}$
3- $y_t = -12y_{t-1} - 100y_{t-2} + 226$ $\quad y_0 = 4$, $y_1 = 14$
4- $y_t = 24y_{t-1} - 225\, y_{t-2}$ $\quad y_0 = 5$, $y_1 = 69$
5- $y_t = 12y_{t-1} - 100y_{t-2} + 89$ $\quad y_0 = 3$, $y_1 = 37$
6- $y_t = -24y_{t-1} - 225y_{t-2}$ $\quad y_0 = 5$, $y_1 = -69$
7- $y_t = -y_{t-2}$ $\quad y_0 = 16$, $y_1 = -7$

۲- مقدار y_{10} را در معادلات فوق شماره‌های ۳ و ۵ و ۷ پیدا کنید.

۳- معادلات تفاضلی همگن زیر را حل کنید.

1- $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$
2- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0$ $\quad y_0 = 1 , y_1 = 2$
3- $y_{t+2} + 8y_{t+1} + 4y_t = 0$
4- $y_{t+2} - 9y_t = 0$ $\quad y_0 = 2 , y_1 = -1$
5- $2y_{t+1} - 3y_t = 0$ $\quad y_0 = 4$
6- $y_{t+2} + 2y_{t+1} + 2y_t = 0$ $\quad y_0 = 1 , y_1 = -1$
7- $y_{t+2} + 16y_t = 0$ $\quad y_0 = 0 , y_1 = 1$
8- $4y_{t+2} + 25y_t = 0$
9- $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 0$
10- $y_{t+2} + 4y_{t+1} + y_t = 0$
11- $y_{t+3} - 6y_{t+2} + 11y_{t+1} - 6y_t = 0$ $\quad y_0 = 0 , y_1 = 1 , y_2 = 1$
12- $y_{t+4} + y_t = 0$
13- $4y_{t+4} - 25y_t = 0$
14- $y_{t+3} - 8y_t = 0$
15- $y_{t+4} + 12 y_{t+2} - 64y_t = 0$
16- $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 4y_{t+1} - 2y_t = 0$

۴- جواب عمومی معادله تفاضلی همگنی را بنویسید که ریشه‌های پولی‌نومیال کرکتریستیک آن با برابر است با: ۲ و ۲- و ۴ و ۲- و $3 \pm 4i$- و۲- و ۲.

۵- معادله تفاضلی مسئله ۴ را بنویسید.

۶- نشان دهید که توابع مولد زیر صحیح می‌باشند.

1- $\dfrac{1}{1-p} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} p^t$

2- $(1+p)^n = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \binom{n}{t} p^t$

3- $e^p = \sum\limits_{t=0}^{\infty} p^t \dfrac{p^t}{t!}$

4- $-\ln(1-p) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{p^{t+1}}{t+1}$

5- $\text{Sin } P = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^4 p^{2t+1}}{(2t+1)!}$

6- $\text{Cos } P = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^t p^{2t}}{(2^4)!}$

7- $\dfrac{1}{(1-p)^2} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} p^{t-1}$

8- $\text{Arc tan } P = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^t p^{2t+1}}{2t+1}$

۷- معادلات زیر را با استفاده از تابع مولد حل کنید.

1- $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 0$ $\quad y_0 = 0 , y_1 = 2$
2- $2y_{t+1} - y_t = 1$ $\quad y_0 = 0$
3- $y_{t+2} + 4y_{t+1} + 4y_t = 0$ $\quad y_0 = 1 , y_1 = 0$
4- $6y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t = 0$
5- $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 0$ $\quad y_0 = 2 , y_1 = -1$
6- $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t = 0$

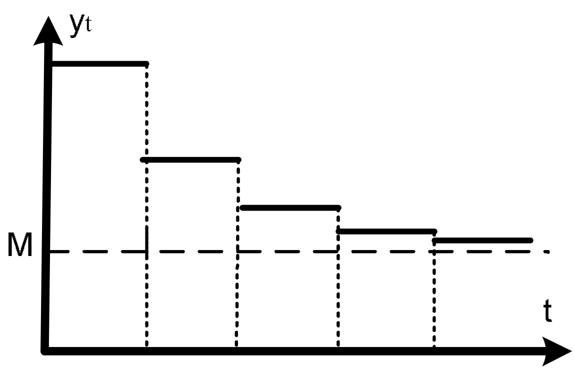
۷- روند زمانی در معادلات تفاضلی خطی

در قسمت‌های پیش روش حل معادلات تفاضلی خطی ارائه شد. در این فصل سعی داریم تا چگونگی روند زمانی معادلات تفاضلی خطی (مخصوصاً مرتبه دوم) را بررسی نمائیم.

۷-۱- دو ریشه حقیقی و مثبت یا صفر

زمانی که دو ریشه حقیقی باشند جواب معادله تفاضلی مرتبهٔ دوم به شکل زیر خواهد بود که M ثابت فرض شده است: $y_t = A(x')^t + B(x'')^t + M$

الف: اگر x' و x'' هر دو کوچکتر از یک باشند با افزایش t، $A(x')^t$ و $B(x'')^t$ تدریجاً به سمت صفر میل می‌نمایند و نتیجتاً y_t به سمت M میل خواهد کرد. (تصویر ۷-۱)

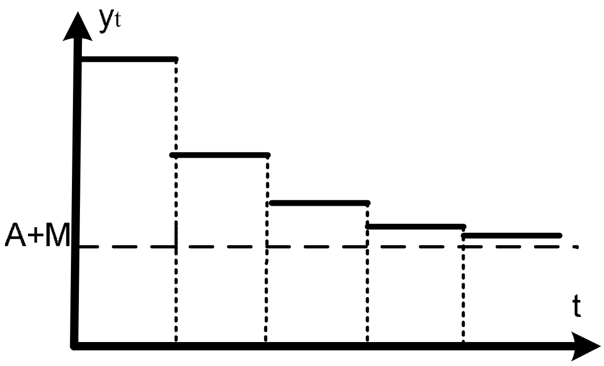


تصویر ۷-۱

ب: اگر یک ریشه مساوی یک (x') و ریشه دیگر از یک ($x''<1$) باشد. با افزایش t مقدار y_t به سمت A+M میل خواهد کرد. چون:

$$y_t = A(1)^t + B(x'')^t + M \implies y_t = B(x'')^t + A + M \implies \lim_{t \to \infty} y_t = A + M$$

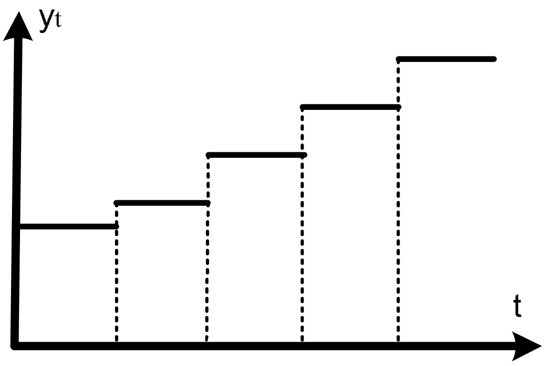
نمودار این حالت در تصویر ۷-۲ آمده است.



تصویر ۷-۲

اگر $x''=1$ و $x'<1$ باشد y_t نهایتاً به سمت B+M میل خواهد کرد.

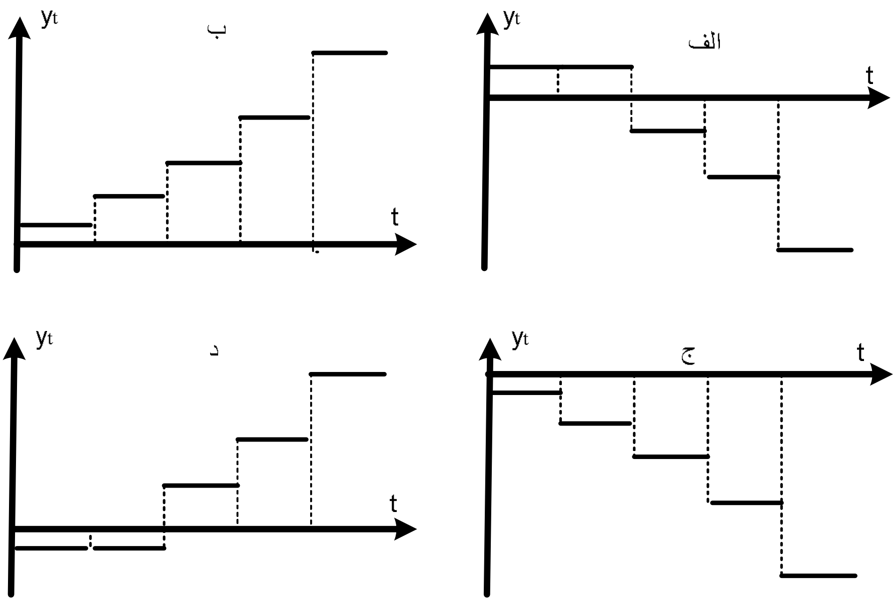
ج: اگر یکی از دو ریشه بزرگتر از یک باشد ($X'>1$) و A , B هر دو مثبت باشند، مقدار y_t با افزایش t بزرگتر و بزرگتر خواهد شد (تصویر ۷-۳).



تصویر ۷-۳

اگر $A<0$ و $B>0$ نتیجه بستگی به این خواهد داشت که 'x و "x کدام بزرگتر خواهند بود. در مراحل اولیه با افزایش t مقدار y_t خیلی بیشتر متأثر از جمله‌ای خواهد بود که ضریب آن (A یا B) بزرگتر است. ولی با افزایش بیشتر t، y_t متأثر از جمله‌ای خواهد بود که 'x یا "x آن بزرگتر باشد. برای مثال تصویر ۷-۴ را نگاه کنید. در این تصویر چهار معادله نمونه ترسیم شده است که دارای خصوصیات فوق می‌باشند.

شکل الف	$y_t = -(3)^t + 2\,(2)^t$	$x' > x''$	$\|A\| < B$
شکل ب	$y_t = -1(2)^t + 2\,(3)^t$	$x' < x''$	$\|A\| < B$
شکل ج	$y_t = -2(3)^t + 1\,(2)^t$	$x' > x''$	$\|A\| > B$
شکل د	$y_t = -2(2)^t + 1\,(3)^t$	$x' < x''$	$\|A\| > B$



تصویر ۷-۴

این موضوع را نیز به شکل زیر می‌توان اثبات نمود فرض کنید $A,B, x', x''>0$ تعمیم به حالات کلی‌تر نیز کاملاً شبیه این حالت می‌باشد. از آنجائی که $x'>x''$ می‌توانیم بنویسیم: $x' = px''$ که p عددی بزرگتر از یک می‌باشد. نسبت P حاصل از $B(x'')^t$ به y_t برابر است با:

$$P= \frac{B(X'')^t}{A(x')^t + B(x'')^t}$$

$$P= \frac{B(x'')^t}{A(px'')^t + B(x'')^t} = \frac{B(x'')^t}{Ap^t(x'')^t + B(x'')^t}$$

$$P= \frac{B}{Ap^t + B}$$

تنها جمله Ap^t بستگی به t دارد و با افزایش t مقدار P کوچکتر و کوچکتر می‌شود و در نهایت

به صفر می‌رسد. بدین ترتیب نسبت $B(x'')^t$ به y_t قابل اغماض می‌شود.

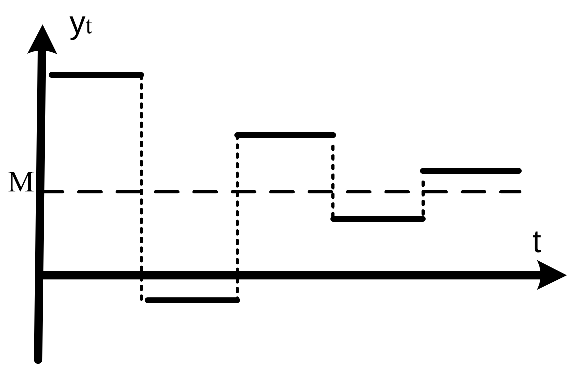
۷-۲- دو ریشه حقیقی و منفی (یا صفر)

در این حالت که $x'',x'<0$ وقتی مقدار t زوج باشد مقدار $(x'')^t$ و $(x')^t$ مثبت و وقتی t فرد باشد مقادیر مزبور منفی خواهند بود. این پدیده باعث نوسان کردن y_t در دوره‌های زمانی و پیاپی می‌شود.

الف: قدرمطلق دو ریشه کوچکتر از یک باشد $|x''| , |x'|<1$؛ $0<$ به عبارت دیگر: $-1<x',x''<0$ در این حالت با افزایش t مقادیر $|B(x'')^t| , |A(x')^t|$ کوچکتر و کوچکتر خواهد شد. در نتیجه مقدار y_t به سمت M نوسان خواهد نمود و در بینهایت بر روی خط $y_c= M$ منطبق می‌شود.

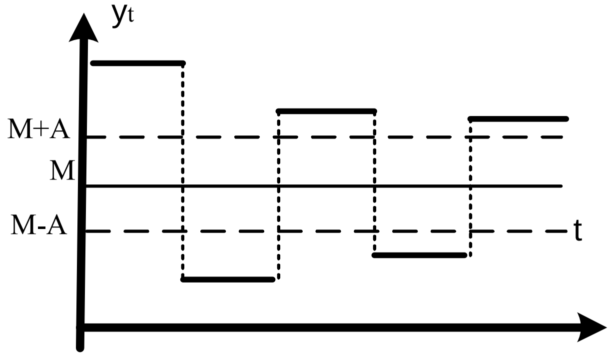
$$\lim_{t\to\infty} y_t = \lim_{t\to\infty} \{A(x')^t + B(x'')^t + M\} = M \qquad -1<x' , x''<0$$

نمونه رفتار y_t در تصویر ۷-۵ آورده شده است.



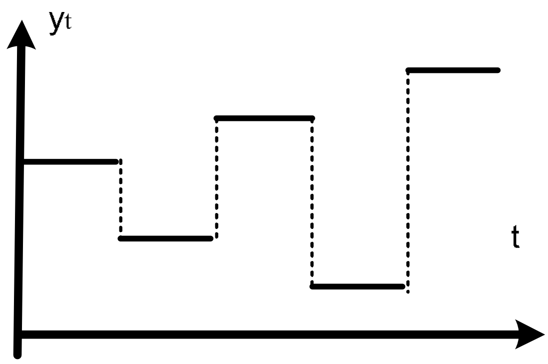
تصویر ۷-۵

ب: اگر یکی از ریشه‌ها مساوی ۱- و دیگری بین صفر و منهای یک باشد. $x'= -1$ و $-1<x''<0$ و در این حالت مقدار $A(X')^t$ افزایش t بستگی ندارد فقط به زوج یا فرد بودن آن بستگی دارد. زمانی که t زوج است $A(x')^t = A$ و زمانی که t فرد است $A(x')^t=-A$ خواهد بود. از طرفی چون مقدار $-1<x''<0$ می‌باشد با افزایش t مقدار $B(x'')^t$ کوچکتر و کوچکتر خواهد شد. نتیجتاً y_t به سمت مقدار $A(x')^t+M$ و $A(-1)^t+M$ متناوباً میل خواهد کرد. نمونه رفتار y_t در این حالت در تصویر ۷-۶ آورده شده است.



تصویر ۷-۶

ج: در حالتی که $x',x''<-1$ باشند نوسانات y_t با افزایش t بیشتر و بیشتر خواهد شد و ریشه‌ای که قدر مطلق آن بزرگتر است اثرات بیشتری در نوسانات y_t خواهد گذاشت. (تصویر ۷-۷)



تصویر ۷-۷

۷-۳- یک ریشه مثبت و دیگری منفی

زمانی که یک ریشه مثبت و یکی منفی باشد باید دید که قدرمطلق کدام ریشه بزرگتر است و مسلماً تأثیرات عمده بر روی y_t را ریشه‌ای خواهد گذاشت که دارای قدرمطلق بزرگتری می‌باشد. حالات زیر می‌تواند اتفاق بیافتد:

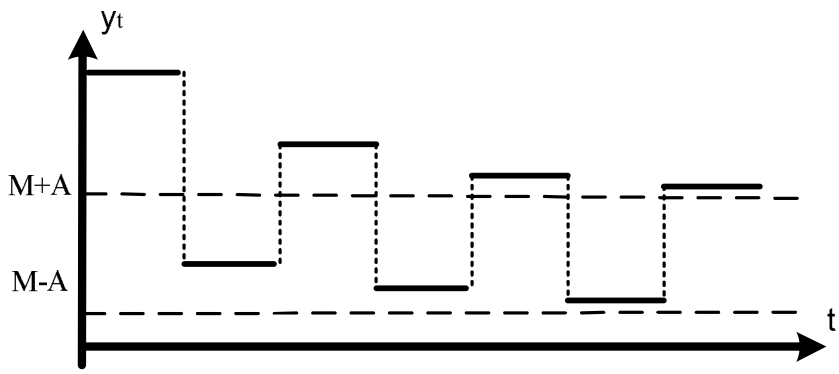
الف: اگر $1>x'>0$ و $|x''|>|x'|$ باشد نهایتاً y_t به سمت M میل خواهد کرد (تصویر۷-۱).

ب: اگر $x'=1$ و $|x''|>|x'|$ باشد y_t به سمت A+M میل خواهد کرد (تصویر ۷-۲).

ج: اگر $x'>1$ و $|x'|>|x''|$ باشد افزایش t باعث بسط یافتن y_t خواهد شد (تصویر ۷-۳).

د: اگر $-1<x'<0$ و $|x'|>|x''|$ باشد y_t با افزایش t نوسان نموده و نهایتاً به سمت M میل خواهد کرد. (تصویر ۷-۵)

ه: اگر $x'=-1$ و $|x'|>|x''|$ باشد با افزایش t, y_t نوسان نموده و آخرالامر نوسانات حول و حوش A+M و A+M- واقع خواهد شد. (تصویر ۷-۸).



تصویر ۷-۸

و: اگر $x'<-1$ و $|x'|>|x''|$ باشد با افزایش t، y_t نوسانات افزایش یابنده نسبت به M پیدا خواهد کرد (تصویر ۷-۷).

ز: اگر $x'=-x''$ باشد باید دید که A , B برابر با چه مقداری هستند و تغییرات y_t بستگی به مثبت یا منفی بودن A , B و بزرگترین بودن قدرمطلق A نسبت به B و بالعکس دارد.

بطور کلی در بررسی روند y_t باید مقادیر A , B و x' , x'' را با همدیگر در نظر گرفت. اگر بخواهیم تمام متغیرهای فوق را یکی یکی بررسی کنیم بحث به درازا خواهد کشید ولی شیوه بررسی را در حالات مختلف دیدیم. خواننده با در نظر گرفتن حالات خاص می‌تواند مسائل مورد نظر را با شیوه استدلال ارائه شده تحلیل نماید.

۷-۴- ریشه‌های مضاعف و حقیقی

در فصل قبل دیدیم که جواب معادله تفاضلی که دارای دو ریشه مضاعف باشد به شکل زیر است:

$$y_t = a_1 x^t + a_2 t x^t + M$$

اگر تعداد ریشه‌های مضاعف بیشتر باشد جواب به شکل زیر خواهد بود:

$y^t= a_1(x^t)+a_2t(x^t) +\ldots+ a_m t^{m-1}(x)^t+M$

که در هر حالت y_t متشکل از جملاتی مانند $at^r(x)^t$, M خواهد بود که a یک عدد ثابت، r یک عدد صحیح و x ریشه مضاعف معادله می‌باشد.

حال اثرات جمله $at^r(x)^t$ را در معادلات تفاضلی بررسی می‌کنیم.

الف: اگر x بزرگتر از یک باشد نتیجتاً $at^r(x)^t$ با افزایش t افزایش خواهد داشت و نتیجتاً روند بسط یابنده پیدا خواهد کرد.

ب: اگر $x=1$ باشد در نتیجه $at^r(x)^t= at^r$ و حالتی شبیه به فوق خواهیم داشت.

ج: اگر $0<x<1$ باشد مقدار $a(x)^t$ با افزایش t به مقدار صفر نزدیک خواهد شد. ممکن است به نظر برسد که این روند را روند بسط یابنده t^r بتواند جبران کند ولی با افزایش t مقدار $(x)^t$ خیلی بیشتر از t^r خواهد بود. نتیجتاً اگر $0<x<1$ باشد جمله $at^r(x)^t$ به سمت صفر میرا خواهد بود.

د: اگر $-1<x<0$ باشد تعبیری مانند ج داریم. ولی با این تفاوت که جمله $at^r(x)^t$ با نوسانات میرا همراه خواهد شد.

ه: اگر $x=-1$ باشد روند $at^r(x)^t$ همانند ب ولی با نوسان خواهد بود.

و: اگر $x<-1$ باشد نتیجه شبیه حالت الف ولی همراه با نوسان خواهد بود.

جواب یک معادله تفاضلی حداقل از چند جمله $at^r(x)^t$ تشکیل شده است. اگر جواب معادله تفاضلی را بصورت زیر بنویسیم:

$y_t= (a_1+a_2t + \ldots+ a_m t^{m-1})x^t+M$

اثر پرانتز فوق به عنوان ضریب خواهد بود و اثر آن خیلی ضعیف‌تر از x^t می‌باشد ولی منفی یا مثبت بودن حاصل پرانتز فوق در چگونگی شروع روند زمانی و ادامه آن تأثیر فراوانی خواهد داشت.

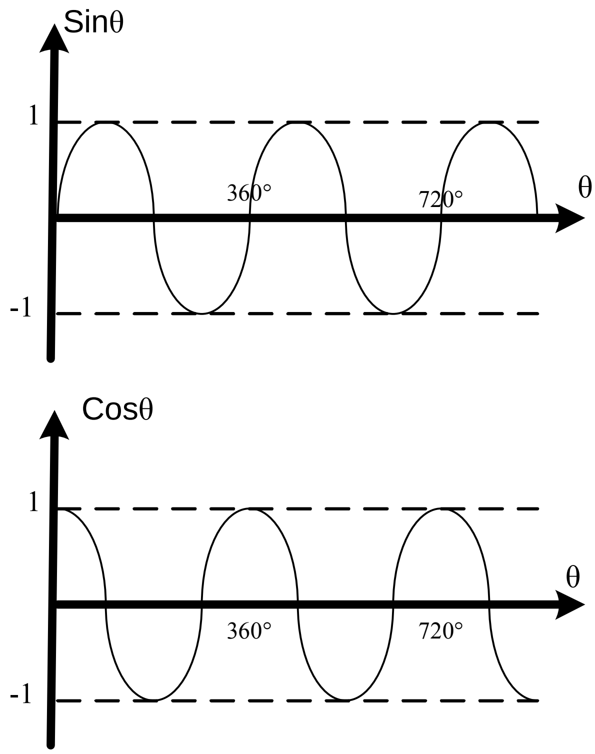
۷-۵- ریشه‌های مختلط در موهومی

می‌دانیم در این حالت جواب معادله تفاضلی به شکل زیر است:

$$y_t= D^t[E \cos (tR)+F \sin (tR)] + M \qquad (۷۵)$$

که ریشه‌های معادله کرکتریستیک مختلط و برابر با $c\pm di$ و مدول آن $D=\sqrt{c^2+d^2}$ می‌باشد. جمله‌ای که در معادله فوق در کروشه قرار دارد در هر ۳۶۰ درجه دارای نوسان

تکراری می‌باشد چون: $ECos(360^{\circ}+q)+FSin(360^{\circ}+q)=ECosq+FSinq$
این مسئله بدین معنی است که هر موقع که tR، 360° افزایش پیدا می‌کند مقدار داخل کروشه تکرار می‌شود. به عبارت دیگر y_t دارای یک سیکل به طول $t=\frac{360}{R}$ می‌باشد. از طرفی چون Sin R=d/D، بدین ترتیب مقدار R را می‌توانیم با استفاده از جداول مثلثاتی پیدا کنیم. اگر بطور مثال $R=60^{\circ}$ باشد؛ طول حرکت سیکلی برابر با شش دوره خواهد بود. چون $t=\frac{360}{60}=6$. نکته‌ای را نیز باید درنظر داشت؛ چون ما راجع به دوره‌های زمانی صحبت می‌کنیم مقدار تابع را در انتهای هر دوره زمانی می‌سنجیم. زیرا t مقادیر اعداد صحیح را به خود می‌گیرد.



تصویر ۷-۹

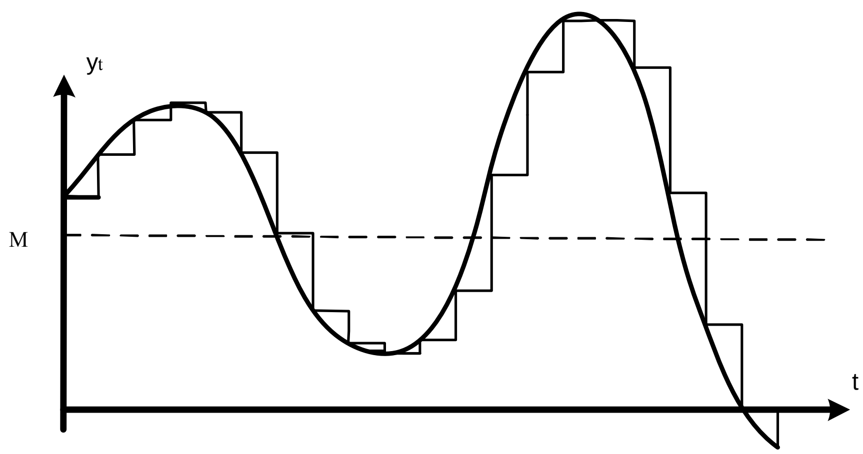
حال فرض کنید که $R=50^{\circ}$ و $\frac{360}{50}=7.2$ در این حالت فرض می‌شود که جمله مزبور

که داخل کروشه (۷۵) قرار دارد تقریباً در هر هفت دوره زمانی یکبار تکرار می‌شود. ولی بطور دقیق‌تر می‌توان گفت که در هر ۳۶ دوره کلیه سیکل‌ها یک مرتبه تکرار می‌شوند چون $5\times 360/5=36$.

مسئله دیگری را نیز باید به خاطر داشت. منحنی‌های $Sinq$ و $Cosq$ همانطور که در تصویر ۷-۹ آمده‌اند دارای سیکل‌های قرینه می‌باشند. و چون ما با مقادیر گسسته t سروکار داریم ممکن است مقدار t درست در نقاط حساس منحنی‌های مزبور واقع نشود. به عبارت دیگر مقادیر مزبور در اول یا وسط سیکل‌های مزبور قرار نگیرد نتیجتاً نمودارهای تصاویر ۷-۱۰ و ۷-۱۱ و ۷-۱۲ «نامتعادل» بنظر برسند.

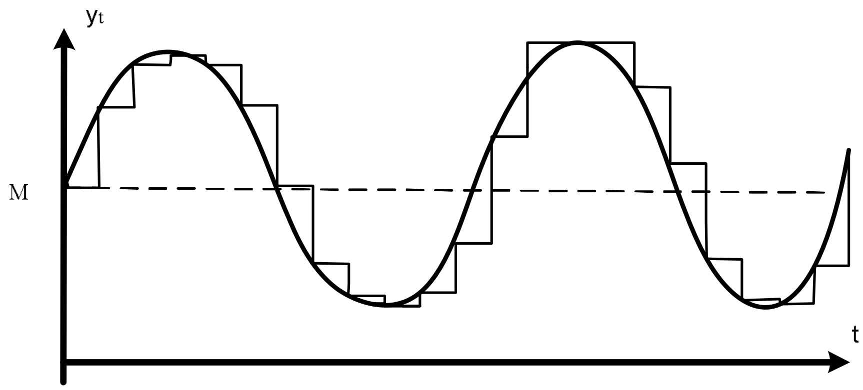
از آنجائی که دانستیم کروشه واقع در فرمول (۷۵) دارای نوسانات یکنواختی می‌باشد و نه میرا است و نه غیرمیرا به بررسی مدول واقع در (۷۵) می‌پردازیم که به توان t می‌رسد. حالات زیر ممکن است اتفاق بیافتد.

الف: اگر $D>1$ باشد، با افزایش t، D^t افزایش نموده و حاصل ضرب آن در کروشه (۷۵) باعث افزایش نوسانات خواهد شد (تصویر ۷-۱۰).



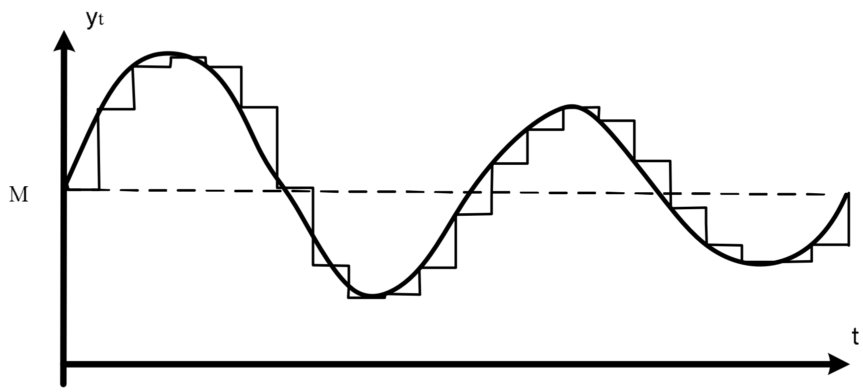
تصویر ۷-۱۰

ب: اگر $D=1$ باشد، D^t برابر با یک خواهد بود و اثری در کروشه (۷۵) نخواهد داشت و y_t نوسانات یکنواخت خواهد داشت. (تصویر ۷-۱۱).



تصویر ۷-۱۱

ج: اگر $D<1$ باشد بنابراین D^t با افزایش t کوچکتر و کوچکتر خواهد شد و نوسانات y_t را میرا خواهد ساخت. (تصویر ۷-۱۲).



تصویر ۷-۱۲

۷-۶- ریشه‌های متعدد

تفاسیر فوق را براحتی می‌توان به معادلات با مرتبه بالاتر نیز تعمیم داد. اگر A ریشه‌ای باشد که دارای بزرگترین قدرمطلق (قدرمطلق و مدول را می‌توان بجای دیگر استعمال نمود و

هر دو یک معنی را می‌دهند) در جواب y_t در معادله مرتبه nام باشد:

$y_t= b_1(x_1)^t +b_2 (x_2)^t + \ldots+ b_n(x_n)^t+M$

اگر قدرمطلق (مدول) هر ریشه‌ای مانند x_r از A کوچکتر باشد اثرات $b_r(x_r^t)$ با افزایش t کوچکتر و کوچکتر شده و قابل اغماض می‌شود. بدین ترتیب اگر قدر مطلق تمام ریشه‌ها کوچکتر از یک باشند y_t به سمت M میرا خواهد بود. اگر ریشه‌ای که دارای بزرگترین قدرمطلق (مدول) می‌باشد مساوی یک باشد y_t نه میرا خواهد بود و نه غیرمیرا. زمانیکه قدرمطلق هر ریشه بزرگتر از یک باشد، y_t غیرمیرا و یا بسط یابنده خواهد بود. اگر فقط یک ریشه یا یک جفت ریشه مختلط با قدرمطلق A داشته باشیم، y_t ممکن است نوسان کننده (روی موج‌های توابع مثلثاتی)، نوسان کننده ساده و یا هیچکدام از آنها باشد که بستگی به این دارد که ریشه مختلط، ریشه حقیقی و منفی و یا ریشه مثبت و حقیقی داشته باشیم. زمانی که بیشتر از یک ریشه داشته باشیم که قدرمطلق آن A باشد، و این ریشه‌ها همه از یک نوع نباشند، برای مثال حقیقی و مختلط باشند دوباره کار کمی مشکل می‌شود. در این حالات نتیجه بستگی به بزرگی b_1 , b_2 … , b_n خواهد داشت که آنها هم بستگی به شرایط اولیه معادله دارند.

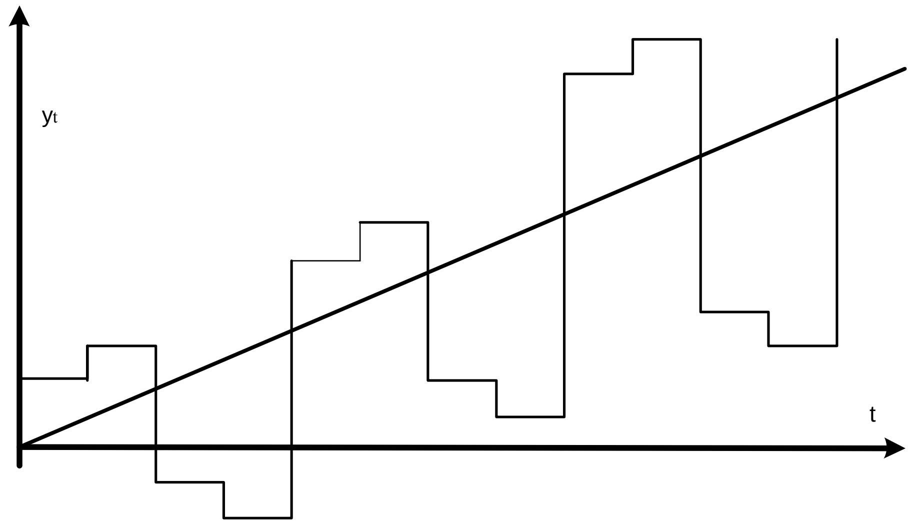
۷-۷- جواب خاص ثابت (ثبات و تعادل)

گفتیم وقتی که معادله تفاضلی غیرهمگن باشد احتیاج به محاسبه دو قسمت داریم یکی تابع مکمل و دیگری جواب خاص. همچنین گفته شد ممکن است جواب خاص به صورت M و یا Mt و یا Mt^2 و ... ظاهر شود. در این حالت y_p را تعادل موقتی مقدار y_t تعریف می‌کنیم. همچنین یک جواب معادله تفاضلی را با ثبات تعریف می‌کنیم که اگر y_t در نقطه‌ای خارج تعادل شروع شود، با افزایش t مقدار آن به سمت مقدار تعادل همگرا باشد. بطور مثال تصاویر ۷-۱۲ و ۷-۵ و ۷-۲ جواب‌های باثبات را نشان می‌دهند.

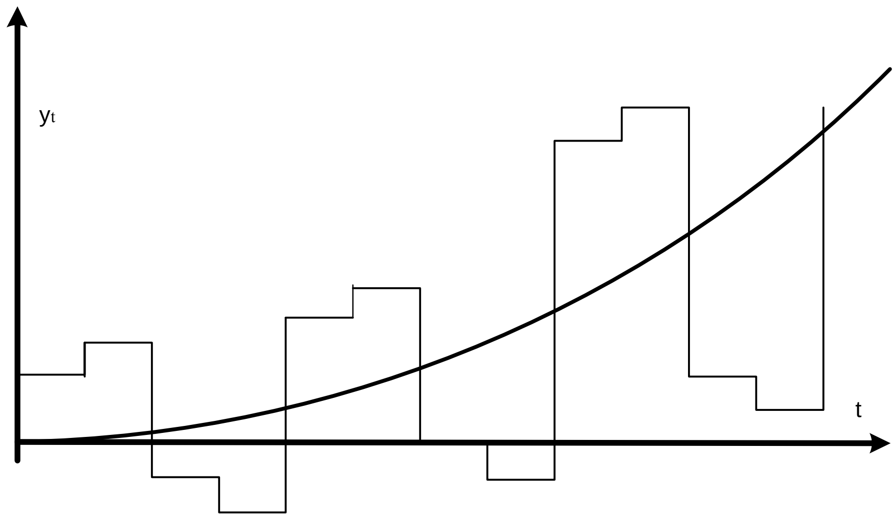
۷-۸- جواب خاص غیرثابت (تعادل متحرک)

همانطور که در قسمت فوق گفته شد جواب خاص می‌تواند به شکل $y_p = bt^r$ ظاهر شود. و این امر در زمانی اتفاق می‌افتد که یک عدد ثابت مانند M نتواند معادله را برقرار سازد. در این حالت یک معادله تفاضلی نمی‌تواند یک تعادل موقتی داشته باشد. بواسطه همین می‌گوئیم که bt^r یک تعادل متحرک می‌باشد. واضح است که جمله bt^r یک روند زمانی

افزایشی را نشان می‌دهد. اگر $r=1$ باشد bt^r به یک روند خطی و اگر $r>1$ باشد به منحنی‌های صافی تبدیل خواهد شد. این حالات در تصاویر ۷–۱۳ و ۷–۱۴ نمایش داده شده است.



تصویر ۷–۱۳



تصویر ۷–۱۴

۷–۹– روش تحلیل گرافیک

اگر معادله تفاضلی مرتبه دوم را به شکل زیر بنویسیم:

$$y_t + by_{t-1} + cy_{t-2} + d = 0 \qquad (۷۶)$$

قواعد زیر در تحلیل روند زمانی y_t بکار می‌آیند:

الف: اگر $b<0$, $c>0$ باشد هیچکدام از ریشه‌های معادله کرکتریستیک منفی نخواهند بود. زیرا در معادله $x^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$x' = \frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c}), \quad x'' = \frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4c})$$

$x'>0$ است زیرا $\sqrt{b^2 - 4c > 0}$, $-b>0$ و چون $-b > \sqrt{b^2 - 4c > 0}$ پس $x''>0$ است.

بطور کلی در معادله $x^n - b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} - b_3x^{n-3} + \ldots = 0$ اگر b_1 , b_2 ,…, b_n همه مثبت باشند معادله فوق هیچ ریشه منفی ندارد. اگر x منفی باشد x^n , x^{n-1} و .... یکی در میان مثبت منفی خواهند شد. بنابراین تمام جملات سمت چپ یا مثبت خواهند شد و یا منفی و بنابراین مجموع آنها نمی‌تواند صفر شود.

ب: اگر $b>0$, $c>0$ باشد هیچکدام از ریشه‌ها مثبت نخواهند بود.

بطور کلی در معادله $x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots = 0$ اگر b_1 , … , b_n مثبت باشند تمام جملات سمت چپ مثبت می‌شوند و مجموع آنها نمی‌تواند صفر باشد.

ج: اگر $c<0$ هر دو ریشه حقیقی و مختلف العلامه هستند. زیرا $delta = \sqrt{b^2 - 4c}$ اگر $c<0$ باشد بزرگتر از صفر خواهد بود و معادله درجه دو دارای دو ریشه حقیقی خواهد بود. و ثانیاً اگر:

$$c<0 \implies -4c>0 \implies b^2 - 4c > b^2 \implies \sqrt{b^2 - 4c} > \sqrt{b^2} = |b| = b$$

بنابراین: $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} > 0$ و $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < 0$ خواهند بود.

د: اگر $b^2 < 4c$ باشد ریشه‌ها مختلط هستند و مدول ریشه‌ها برابر با $\sqrt{c}$ می‌باشد. می‌دانیم که ریشه‌های مختلط برابر است با: $r + si = -\frac{b}{2} + i\sqrt{\frac{4c - b^2}{2}}$ و مدول آنان:

$$\sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{4c - b^2}{4}} = \sqrt{c} \qquad (۷۷)$$

ه: اگر $b^2 = 4c$ باشد هر دو ریشه مضاعف خواهند بود زیرا $delta = 0$ می‌شود.

و: اگر $c + b + 1 = 0$ باشد یک ریشه مساوی یک خواهد بود زیرا:

$$x^2 + bx + c = (x-1)(x+b+1) + c + b + 1$$

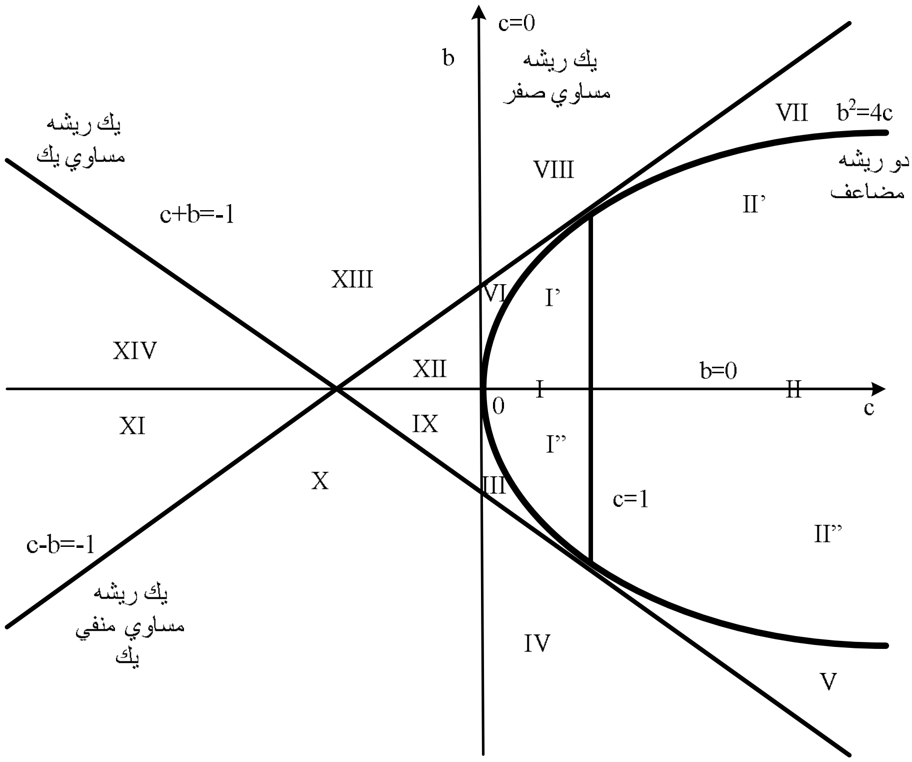
ز: اگر c-b+1=0 باشد یک ریشه مساوی منفی یک خواهد بود زیرا:

$$x^2+bx+c= (x+1)(x+b-1)+c-b+1$$

ح: اگر c=0 باشد یک ریشه مساوی صفر است زیرا:

$$x^2+ bx = x(x+b)=0 \implies x'=0 , x''= -b$$

با کمک قواعد فوق تصویر ۷-۱۵ را رسم می‌کنیم.



تصویر ۷-۱۵

از تصویر ۷-۱۵ روند زمانی y_t را با توجه به ضرائب معادله تفاضلی (b,c) و ریشه‌های معادله کرکتریستیک آن می‌توان پیدا کرد. مناطق معرفی شده در تصویر ۷-۱۵ در زیر توضیح داده شده‌اند:

I: شامل (I' , I"): نوسانات موجی میرا (ریشه‌ها، مختلط، مدول کوچکتر از یک)

II: شامل (II' , II"): نوسانات موجی غیرمیرا (ریشه‌ها مختلط، مدول بزرگتر از یک)

III: میرا و بدون نوسان (ریشه‌ها حقیقی، کوچکتر از یک)

IV: نهایتاً غیرمیرا و بدون نوسان (ریشه‌ها حقیقی، یکی بزرگتر از یک و یکی کوچکتر از یک و هر دو ریشه مثبت)

V: غیرمیرا بدون نوسان (ریشه‌ها حقیقی، بزرگتر از یک)

VI: نوسانات میرا (ریشه‌ها حقیقی، هر دو منفی با قدر مطلق کوچکتر از یک)

VII: غیرمیرا و با نوسان (ریشه‌ها حقیقی، هر دو منفی با قدرمطلق بزرگتر از یک)

VIII: نهایتاً غیرمیرا و با نوسان (ریشه‌ها حقیقی، هر دو ریشه مثبت، هر دو ریشه کوچکتر از یک)

IX: میرا و بدون نوسان (ریشه‌ها حقیقی، هر دو ریشه مثبت، هر دو ریشه کوچکتر از یک)

X: نهایتاً غیرمیرا و بدون نوسان (ریشه‌ها حقیقی، یکی مثبت و یکی منفی، ریشه مثبت بزرگتر از یک و ریشه منفی با قدرمطلق کوچکتر از یک)

XI: نهایتاً غیرمیرا و بدون نوسان (ریشه‌ها حقیقی، یکی مثبت و یکی منفی قدرمطلق هر دو ریشه بزرگتر از یک و قدرمطلق ریشه مثبت بزرگتر از ریشه منفی)

XII: میرا و با نوسان (ریشه‌ها حقیقی، یکی مثبت و یکی منفی، قدرمطلق هر دو ریشه کوچکتر از یک)

XIII: نهایتاً غیرمیرا و با نوسان (ریشه‌ها حقیقی، یکی مثبت و یکی منفی قدرمطلق ریشه منفی بزرگتر از یک و ریشه مثبت کوچکتر از یک)

XIV: نهایتاً غیرمیرا و با نوسان (ریشه‌ها حقیقی، یکی مثبت و یکی منفی، قدرمطلق هر دو ریشه بزرگتر از یک و قدرمطلق ریشه منفی بزرگتر از ریشه مثبت)

روش ترسیم تصویر ۷–۱۵ همانطور که در فصول قبل توضیح داده شده است خیلی ساده می‌باشد. برای ترسیم این گونه تصاویر باید مقادیر حساس را که از لحاظ تحلیل مورد نظر مهم می‌باشند را روی نمودار مشخص کرده و ترکیب‌های مختلف دو محور را در مقایسه با آنان بررسی نمود. در تحلیل روند زمانی y_t در معادله تفاضلی مرتبه دوم خصوصیات حقیقی بودن ریشه‌ها، مختلط بودن ریشه‌ها، مضاعف بودن آنان، منفی و یا مثبت بودن آنان، مقدار قدرمطلق ریشه‌ها، بزرگتر یا کوچکتر از یک بودن همه از مقادیر حساس برای تحلیل می‌باشند. این مقادیر را بر روی دستگاه مختصات بامحورهای c , b پیدا می‌کنیم. برای اینکه بحث به

درازا نکشد فقط مرزهای مهم هر منطقه را شمارش می‌کنیم.

:I		b2<4c	c<1	c>0			
	I'	b<2	b>0				
	I"	b>-2	b<0				
:II		b2<4c	c>1	c>0			
	II'	b>0					
	II"	b<0					
:III		b<0	c>0	b2>4c	c<1	b>-2	c+b>-1
:IV		c>0	b<0	c+b<-1	b<-1		
:V		b2>4c	c>0	c+b>-1	b<0	b<-2	
:VI		b2>4c	b>0	c>0	c-b>-1	c<1	b<2
:VII		b2>4c	c>0	b>0	c-b>-1	b>2	
:VIII		c>0	b>0	b>1	c-b<-1		
:IX		c<0	b<0	c>-1	b>-1	c+b>-1	
:X		b<0	c<0	c-b>-1	c+b<-1		
:XI		c<0	b<0	c-b<-1	c<-1		
:XII		b>0	c<0	b<1	c>-1	c-b>-1	
:XIII		b>0	c<0	c-b<-1	c+b>-1		
:XIV		b>0	c<0	c+b<-1	c<-1		

مناطق بسیار دیگری را می‌توان در نمودار ۷-۱۵ شمارش و بررسی نمود مانند کلیه نقاطی که روی خطوط و منحنی رسم شده در تصویر مذکور می‌باشند و یا محل تقاطع خطوط با یکدیگر و با منحنی و از این قبیل ولی به علت به درازا کشیدن مطلب از این نکات صرف نظر نموده و بررسی آنرا به خواننده واگذار می‌کنیم. در پیدا کردن مناطق فوق می‌توان از قضیه عامل درجه استفاده نمود که بشرح زیر می‌باشد.

قضیه ۸ (قضیه عامل در جبر)

ضریب دوم در یک معادله پولی‌نومیال درجه دو همیشه برابر است با منهای مجموع دو ریشه و جمله ثابت برابر است با حاصل ضرب ریشه‌ها.

اگر پولی‌نومیال درجه دو $x^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه x' , x' باشد داریم:

$$b=-(x'+x''),\quad c=x'x'' \qquad (۷۸)$$

$$(x-x')(x-x'')=x^2-(x'+x'')x+x'x''=x^2+bx+c$$

از این قضیه نتایج زیر حاصل می‌شود:

الف: ریشه‌های مثبت در ربع چهارم قرار می‌گیرند.

اگر دو ریشه مثبت باشد $c=x'x''>0$ و $b=-(x'+x'')<0$ و چون $c>0$ و $b<0$

است هر ترکیب c,b در ربع چهارم قرار خواهد گرفت. (تصویر ۷–۱۵).

ب: ریشه‌های منفی در ربع اول قرار می‌گیرند (تصویر ۷–۱۵)

چون $b= -(x'+x'')>0 , c= x'x''>0$

ج: دو ریشه مختلف العلامه و ریشه با قدرمطلق بزرگتر منفی در ربع دوم قرار خواهد گرفت. (تصویر ۷–۱۵).

زیرا $b= -(x'+x'')>0 , c= x'x''<0$

د: دو ریشه مختلف العلامه و ریشه با قدرمطلق مثبت در ربع سوم قرار خواهد گرفت. (تصویر۷–۱۵).

زیرا $b= -(x'+x'')<0 , c= x'x''< 0$

تعمیم این قضیه به پولی نومیال مرتبه nام در فصول بعد خواهد آمد.

تمرین ۸

۱- چگونگی روند زمانی y_t را در معادله تفاضلی زیر برحسب مقادیر مختلف c,b,a را بطور جبری و گرافیکی بررسی نمایند.

$$y_{t+2} -a(1+b)y_{t+1} +aby_t= c$$

۸- بحث در معادلات تفاضلی خطی

به مهمترین مشکلی که در حل معاملات تفاضلی خطی مرتبه‌های بیش از دو برمی‌خوریم حل معادله پولی‌نومیال کرکتریستیک می‌باشد. با توجه به پیشرفت‌هائی که در نظریه معادلات صورت گرفته می‌دانیم که معادله درجه دوم دارای روش حل جبری بوده و به راحتی می‌توان اینگونه معادلات را بر حسب ریشه‌ها حل نمود. معادلات درجه سوم و درجه چهارم را نیز با استفاده از روشهای مشابه ولی پیچیده‌تر می‌توان حل نمود. و همچنین بعضی از حالات خاص معادلات درجه پنجم و بالاتر نیز به سختی قابل حل می‌باشند. ولی حتی بعضی ثابت کرده‌اند یک پولی‌نومیال بالاتر از پنج دارای جواب جبری نمی‌باشد! در عین حال روش‌های آنالیز عددی قادر به تجزیه و تحلیل ریشه‌ها و همچنین محاسبه آنها با تقریب دلخواه می‌باشند. حال سعی می‌کنیم چند نمونه از روش‌های تحلیلی- عددی راجع به ریشه‌های معادلات پولی‌نومیال را مختصراً بررسی نمائیم.

۸-۱- روش استرم (Sturm)

همانطور که گفته شد برای پیدا کردن روند زمانی یک معادله تفاضلی باید تعداد، نوع و مقدار ریشه‌های معادله پولی نومیال کرکتریستیک را بدانیم. در صورتی که مقدار ریشه‌ها دقیقاً تعیین نشده باشد باید مقدار تقریبی آنان معلوم باشد تا بتوان تشخیص داد که در چه فاصله‌ای قرار می‌گیرند و نتیجتاً باعث چه روند زمانی برای معادله تفاضلی می‌گردند. روش استرم برای بررسی اینکه کدام ریشه در داخل چه فاصله‌ای قرار می‌گیرد بکار گرفته می‌شود.

۸-۱-۱- ریشه‌های حقیقی

فرض کنید که پولی‌نومیال کرکتریستیک یک معادله تفاضلی به شکل کلی زیر است:

$$f(x)= a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+ a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (۷۹)$$

مشتق تابع $f(x)$ را با $f_1(x)$ نشان داده آنرا محاسبه می‌کنیم:

$$f_1(x)=\frac{df^{(x)}}{dx} = na_0\, x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$$

پولی‌نومیال‌های دیگری را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=g_1(x).f_1(x)-f_2(x) \quad ==> \quad f_2(x)= g_1(x).f_1(x)-f(x)$$

به عبارت دیگر مقدار $f_2(x)$ برابر با باقیمانده تقسیم $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ ضربدر منفی یک می‌باشد و $g_1(x)$ برابر با خارج قسمت خواهد بود. یا بطور واضح‌تر:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = g_1(x) + \frac{-f_2(x)}{f_1(x)}$$

به همین ترتیب پولی‌نومیال‌های بعدی را نیز محاسبه می‌نمائیم. پس اگر $g(x)$ بیانگر خارج قسمت تقسیم‌ها باشد بطور کلی پولی‌نومیال‌های استرم به شکل زیر است.

$$\begin{aligned}
f(x) &= g_1(x).f_1(x)-f_2(x)\\
f_1(x) &= g_2(x).f_2(x)-f_3(x)\\
f_2(x) &= g_3(x).f_3(x)-f_4(x)\\
&\vdots\\
f_{n-2}(x) &= g_{(n-1)}(x).f_{(n-1)}(x)-f_n(x)
\end{aligned}$$

با کمی دقت واضح است که درجه پولی‌نومیال‌های استرم به ترتیب پائین می‌آید وآخرین پولی‌نومیال یک عدد ثابت می‌باشد. برای اینکه بدانیم که ریشه پولی‌نومیال (۷۹) در چه فاصله‌ای قرار می‌گیرد از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

قضیه ۹ (قضیه استرم)

اگر پولی‌نومیال (۷۹) دارای ریشه‌های مضاعف نباشد و $a<b$ دو عدد حقیقی باشند. تعداد ریشه‌های حقیقی $f(x)$ که بین $x=a$, $x=b$ قرار می‌گیرند برابر است با تعداد تغییر علامت توابع استرم وقتی که $x=a$ می‌باشد، منهای تعداد تغییر علامت همان توابع زمانی که $x=b$ است یا $V(a)-V(b)$.

برای روشن شدن این قضیه به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۸-۱

پولی‌نومیال کرکتریستیک معادله تفاضلی $y_t= 3y_{t-1} +6y_{t-2} - 4y_{t-3}$ به شکل زیر است. می‌خواهیم بدانیم این پولی‌نومیال دارای چند ریشه حقیقی بوده و ریشه‌ها در چه فواصلی قرار دارند.

$$f(x)= x^3-3x^2-6x+4$$

پولی‌نومیال‌های استرم راتشکیل می‌دهیم. $f_1(x)=f'(x)= \frac{df(x)}{dx} = 3x^2-6x-6$

$f(x)$ را بر $f_1(x)$ تقسیم نموده باقیمانده را در منفی یک ضرب می‌کنیم. حاصل را $f_2(x)$ می‌نامیم.

$$f_2(x)= 6x-2$$

$f_1(x)$ رابر $f_2(x)$ تقسیم کرده باقیمانده را در منفی یک ضرب می‌کنیم $f_3(x)$ بدست می‌آید:

$$f_3(x)=\frac{23}{3}$$

پس پولی‌نومیال‌های استرم این مثال به شکل زیر هستند.

$$f(x)= x^3-3x^2-6x+4$$
$$f_1(x)= 3x^2-6x-6$$
$$f_2(x)= 6x-2$$
$$f_3(x)=\frac{23}{3}$$

برای اینکه بدانیم چند تا از ریشه‌های پولی‌نومیال کرکتریستیک مزبور بین صفر و یک قرار می‌گیرند مقادیر توابع فوق را به ازاء $x=0$ و $x=1$ محاسبه می‌کنیم.

$f(0) = 4>0 \quad ==> +$
$f_1(0) = -6<0 \quad ==> -$
$f_2(0) = -2<0 \quad ==> -$
$f_3(0) = \frac{23}{3}>0 \quad ==> +$
$f(1) = -4<0 \quad ==> -$
$f_1(1) = -9<0 \quad ==> -$
$f_2(1) = +4>0 \quad ==> +$
$f_3(1) = \frac{23}{3}>0 \quad ==> +$

اگر $V(0)$ را تعداد تغییر علامت از $f(0)$ به $f_1(0)$ سپس $f_2(0)$ و... بنامیم، $V(0)=2$ می‌شود و آن بدین ترتیب است که $f(0)$ مثبت است، $f_1(0)$ منفی و $f_2(0)$ و $f_3(0)$ مثبت است. پس از مثبت به منفی و از منفی به مثبت باعث دو تغییر علامت می‌شود. پس $V(0)=2$ است.

با روش مشابه می‌بینیم که $V(1)=1$ است. بنابراین تعداد ریشه‌های پولی‌نومیال کرکتریستیک این مثال که بین صفر و یک واقع می‌شوند برابر است با $V(0)-V(1)=1$. برای پیدا کردن کل تعداد ریشه‌های حقیقی یک معادله پولی‌نومیال، پولی نومیال‌های استرم را در فاصلهٔ $x=-\infty$ تا $x=+\infty$ ارزیابی می‌کنیم. پس در مثال ما:

$f(-\infty)<0,\quad f_1(-\infty)>0,\quad f_2(-\infty)<0,\quad f_3(-\infty)>0 \quad ==>V(-\infty)=3$
$f(+\infty)>0,\quad f_1(+\infty)>0,\quad f_2(+\infty)>0,\quad f_3(+\infty)>0 \quad ==>V(+\infty)=0$

کل تعداد ریشه‌های حقیقی این معادله برابر است با: $V(-\infty)-V(+\infty)= 3$

تعداد ریشه‌های مثبت برابر است با: $V(0)-V(+\infty)= 2$

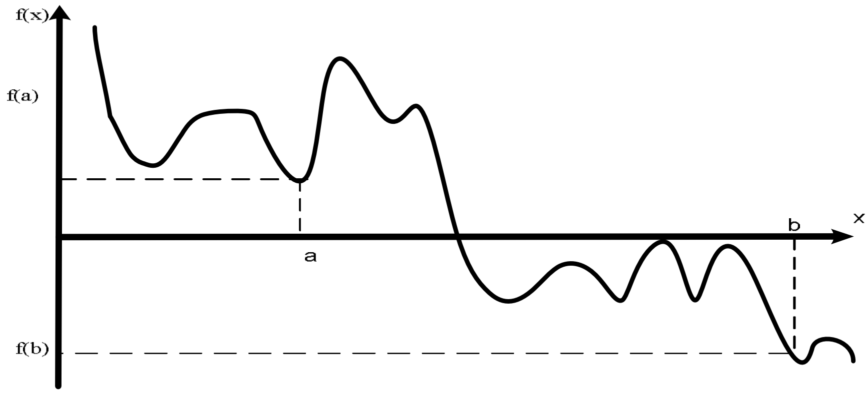
تعداد ریشه‌های منفی برابر است با: $V(-\infty) - V(0) = 1$

به همین ترتیب می‌توان تشخیص داد که ریشه‌های حقیقی یک پولی‌نومیال در چه فواصلی قرار می‌گیرند. دوباره برمی‌گردیم به چگونگی عملکرد روش استرم.

قضیه ۱۰

اگر $f(x)$ پیوسته باشد و برای مقادیر حقیقی b,a، $f(a)$, $f(b)$ مختلف العلامه باشند. حداقل یک عدد حقیقی مانند c می‌توان یافت بطوریکه $f(c)=0$ شود. به عبارت دیگر $f(x)$ حداقل یک ریشه حقیقی بین b,a دارد.

اثبات قضیه با توجه به تصویر ۸-۱ واضح است و درک آن به خواننده واگذار می‌شود.



تصویر ۸-۱

قضیه ۱۱

اگر پولی‌نومیال $f(x)$ دارای ریشه‌های مضاعف نباشد هیچ مقداری از x را نمی‌توان یافت که هم ریشه $f(x)$ و هم ریشه مشتق آن باشد.

این قضیه را با استفاده از قضیه (۸) (قضیه عامل در جبر) می‌توان ثابت کرد. اگر r یک ریشه $f(x)$ باشد می‌توان نوشت: $f(x)= g(x)(x-r)$

که $g(x)$ یک پولی‌نومیال است که r ریشه آن نیست ($g(r)\neq 0$). از $f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)= \frac{dg(x)}{dx}(x-r)+g(x)$$

$x=r$ را درون مشتق بدست آمده قرار داده:

$$f'(r)= \frac{dg(r)}{dx}(r-r)+ g(r)= g(r)\neq 0$$

بنابراین r نمی‌تواند ریشه $f'(x)$ باشد.

قضیه ۱۲

اگر قضیه ۱۱ صادق باشد هیچکدام از پولی‌نومیال‌های پشت سر هم استرم نمی‌توانند دارای یک ریشه باشند.

با استفاده از برهان خلف این قضیه ثابت می‌شود. فرض کنید بر خلاف قضیه یک عدد حقیقی مانند s وجود دارد بطوریکه $f_3(s) = f_4(s)= 0$ بنابراین s یک ریشه $f_3(x)$ و $f_4(x)$ است.

با استفاده از (۸۰) می‌نویسیم:

$$f(x) = g_1(x)\, f_1(x)- f_2(x)$$
$$f_1(x)= g_2(x)\, f_2(x)- f_3(x)$$
$$f_2(x)= g_3(x)\, f_3(x)- f_4(x)$$

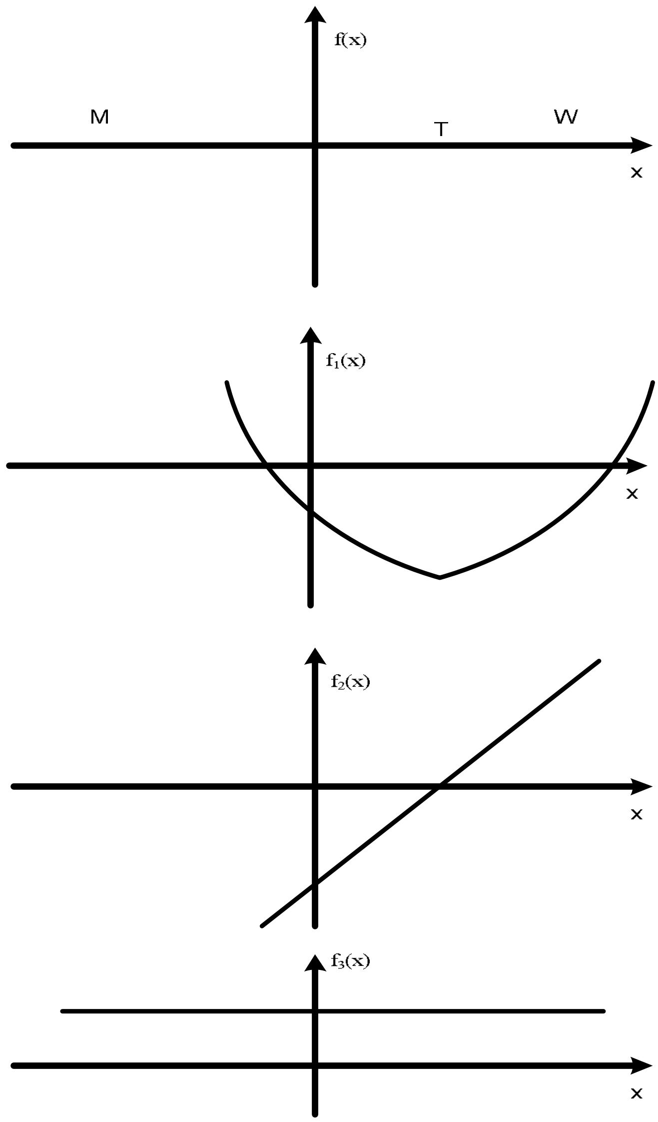
s را در $f_2(x)$ جایگزین می‌کنیم:

$$f_2(s)= g_3(s).(0)-0=0$$

بنابراین s باید یک ریشه $f_2(x)$ باشد. مرتباً s را در توابع $f_1(x)$ و $f(x)$ قرار می‌دهیم. نتیجه برابر خواهد بود با اینکه s ریشه $f_1(x)$ و $f_2(x)$ نیز هست که برخلاف قضیهٔ ۱۱ می‌باشد و $f_3(x)$ و $f_4(x)$ و یا دو پولی‌نومیال استرم پشت سرهم دیگر نمی‌توانند دارای یک ریشه مشترک s باشند.

حال برمی‌گردیم به توضیح قضیه ۹ (قضیه استرم). با توجه به تصویر (۲-۸) پولی‌نومیال $f(x)$ دارای سه ریشه W,T,M می‌باشد. در سمت چپ این نقاط $f(x)$ و $f_1(x)$ مختلف‌العلامه می‌باشند. به عبارت دیگر سمت چپ نقطه M، $f(x)$ منفی و $f_1(x)$ مثبت است. ولی در سمت راست این نقاط $f(x)$ و $f_1(x)$ متحدالعلامه می‌باشند. بدین ترتیب وقتی از یک ریشه $f(x)$ عبور کنیم علامت $f(x)$ تغییر می‌کند که باعث کاهش $V(x)$ به اندازه یک واحد می‌شود. دلیل این امر واضح است زیرا طبق قضیه ۱۲ $f(x)$ و $f_1(x)$ نمی‌توانند یک ریشه مشترک داشته باشند. پس در هر ریشه x=r از تابع $f(x)$، مشتقش $f_1(r)$ باید یا مثبت یا منفی باشد (نمی‌تواند مساوی صفر شود). بدین ترتیب که نمودار $f(x)$ وقتی محور xها را قطع کرد به سمت بالا یا پائین می‌رود و نمی‌تواند مماس بر آن شود. فرض کنید $f(x)$ به سمت پائین می‌رود و محور xها را در ریشه x=T قطع می‌کند. از آنجائی که $f(x)$ پائین رونده است مشتق آن $f_1(x)$ باید منفی باشد و $f(x)$ از مثبت به منفی تبدیل می‌شود. بدین ترتیب در سمت چپ نقطه T، $f(x)$ و $f_1(x)$ باید مختلف‌العلامه باشند $f(x)>0$ $f_1(x)<0$ و در سمت راست T هر دو باید یک علامت داشته

باشند. بنابراین اگر f(x) از روی یک ریشه عبور کند علامت آن تغییر کرده و باعث کاهش V(x) به مقدار یک واحد می‌گردد.



تصویر (۸-۲)

به اثبات قسمت دیگر قضیه۹ برمی‌گردیم. بدین ترتیب که هیچ ریشه‌ای از $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و .. و $f_n(x)$ روی V(x) اثر نمی‌گذارد. فرض کنید در فاصله مورد نظر ما حداقل یکی از

ریشه‌های توابع استرم بجز $f(x)$، مثلاً $f_5(x)$ دارای یک ریشه $x=s$ باشد. بنابر قضیه ۱۲ داریم $f_4(s) \neq 0$ و $f_6(s) \neq 0$. ولی با استفاده از (۸۰):

$$f_4(x)= g_5(x)\, f_5(x) - f_6(x)$$

چون $f_5(s)= 0$ پس:

$$f_4(s)=- f_6(s)$$

پس بازاء ریشه $x=s,\ f_5(x)$ مقدار پولی‌نومیال‌های f_4 و f_5 باید دارای قدرمطلق مساوی بوده ولی مختلف‌العلامه باشند. بدین ترتیب اگر f_5 تغییر کند باید متحدالعلامه با f_4 یا f_6 و یا مختلف‌العلامه با آنها باشد، و f_6 باید دقیقاً دارای یک تغییر علامت باشد. پس تعداد تغییر علامت آنان زمانی که x از یک ریشه f_5 می‌گذرد نمی‌تواند تغییر کند. این نتایج در زیر نشان داده شده است.

x	f_4	f_5	f_6	f_7
$s-\Delta s$	+	+	-	1
$s+\Delta s$	+	-	-	1

بطور خلاصه اولاً هر زمان که از یک ریشه $f(x)$ از چپ به راست عبور می‌کنیم تعداد تغییر علامت بین $f(x)$ و $f_1(x)$ یک واحد کاهش می‌یابد. ثانیاً اگر هرکدام از پولی‌نومیال‌های استرم به غیر از $f(x)$ دارای ریشه باشند ریشه‌های آنان در V اثری ندارد. و ثالثاً حتی اگر یکی از پولی‌نومیال‌های مزبور از یک ریشه عبور کند نمی‌تواند اثری روی V بگذارد زیرا پولی‌نومیال‌های ماقبل و مابعد آن طوری ساخته شده‌اند که همیشه مختلف‌العلامه هستند. بدین ترتیب قضیه استرم ثابت شده است.

۸-۱-۲- ریشه‌های مضاعف

زمانیکه پولی‌نومیال کرکتریستیک دارای ریشه مضاعف باشد تغییرات کوچکی در روش استرم پدیدار خواهد شد.

قضیه ۱۳

اگر $f(x)$ دارای ریشه‌های مضاعف باشد تمام پولی‌نومیال‌های $f(x)$ و $f_1(x)$ و ... و $f_n(x)$ دارای یک عامل مشترک خواهند بود.

بدین ترتیب که تابع $f(x)$ و مشتق آن $f_1(x)$ باید دارای یک عامل مشترک باشند. زیرا اگر $f(x)$ دارای m ریشه مضاعف $x=r$ باشد نتیجتاً باید داشته باشیم:

$$f(x)= F(x)(x-r)^m$$

که $F(x)$ خودش یک پولی‌نومیال می‌باشد. همچنین $f_1(x)$ برابر است با

$f_1(x)= F(x)_m(x-r)^{m-1} + F'(x)(x-r)^m$

در این جا با مقایسه $f(x)$, $f_1(x)$ متوجه می‌شویم که هر دو عامل $(x-r)^{m-1}$ مشترک هستند. با استفاده از (۸۰) داریم:

$$f(x)=g_1(x)\, f_1(x)–fc(x)$$

یا

$$f_2(x) = g_1(x)\, f_1(x)- f(x)$$

اگر $f(x)$ و $f_1(x)$ را که اول پیدا کردیم در $f_2(x)$ بکار بریم معلوم خواهد شد که $f_c(x)$ نیز دارای عامل $(x-r)^{m-1}$ می‌باشد. با روش مشابه پولی‌نومیال‌های بعدی را نیز می‌توان به همین شکل دنبال نمود.

قضیه ۱۴

اگر $f(x)$ دارای ریشه‌های مضاعف باشد در پروسه تقسیمات متوالی پولی‌نومیال‌ها به یک باقیمانده صفر خواهیم رسید (مثلاً $f_6(x)= 0$).

می‌دانیم که آخرین پولی‌نومیال استرم $f_n(x)$ یک عدد ثابت است. اگر $f_n(x)$ مساوی صفر نباشد نمی‌تواند دارای عامل $(x-r)$ باشد ولی طبق قضیه ۱۳ می‌دانیم که اگر $f(x)$ دارای ریشه مضاعف باشد تمام پولی‌نومیال‌ها دارای یک عامل مشترک $(x-r)$ خواهند بود. بنابراین $f_n(x)=0$ می‌باشد.

قضیه ۱۵

اگر $f(x)$ دارای ریشه‌های مضاعف باشد ریشه آخرین پولی‌نومیال غیرصفر ریشه‌های مضاعف $f(x)$ خواهد بود.

بطور مثال اگر $f_6(x)= 0$ با استفاده از (۸۰):

$$f_4(x)= g_5(x)\, f_5(x) – 0$$

پس $f_5(x)$ یک عامل $f_4(x)$ است و همینطور

$$f_3(x)= g_4(x)\, f_4(x)- f_5(x) = g_4(x)\, g_5(x)\, f_5(x)- f_5(x)$$

پس $f_5(x)$ یک عامل $f_3(x)$ هست. با ادامه دادن این استدلال می‌بینیم که $f_5(x)$ عامل مشترک $f(x)$ و $f_1(x)$ و $f_2(x)$ نیز هست. بدین ترتیب می‌توانیم بنویسیم:

$$f(x)= F(x)\, f_5(x)$$
$$f_1(x)= F_1(x)\, f_5(x)$$

که $F(x)$ و $F_1(x)$ پولی‌نومیال هستند. بدین ترتیب هر ریشه $f_5(x)$ مانند w باعث می‌شود که $f(w)= f_1(w)= 0$. با استفاده از قضیه ۱۱، w باید ریشه مضاعف $f(x)$ نیز باشد.

دوباره برمی‌گردیم به مسئله اصلی و تعیین تقریبی ریشه‌ها بوسیله روش استرم. در قدم اول پولی‌نومیال‌های استرم را تشکیل می‌دهیم. پولی‌نومیال مرتبه f(x) را به آخرین پولی‌نومیال غیرصفر تقسیم می‌کنیم. برای هر m ریشه مضاعف، کسر $f(x)/f_5(x)$ شامل یک جمله $\frac{(x-r)^m}{(x-r)^{m-1}} = x-r$ خواهد بود. بنابراین، این کسر شامل تمام ریشه‌های متمایز f(x) می‌باشد، ولی در $f(x)/f_5(x)$ هیچ ریشه مضاعف وجود نخواهد داشت زیرا آنها با همدیگر ساده می‌شوند و از صورت و مخرج حذف می‌گردند. بنابراین می‌توانیم ریشه‌های حقیقی f(x) را به شکل زیر جدا کنیم:

الف: توابع استرم را تشکیل می‌دهمیم. اگر $f_n(x) \neq 0$ باشد f(x) دارای ریشه‌های مضاعف نیست. و روش مذکور در قسمت ۸-۱-۱ را بکار می‌بریم.

ب: اگر $f_n(x)= 0$ شد، f(x) دارای ریشه مضاعف بوده. کسر $f(x)/f_k(x)$ را محاسبه می‌نمائیم که $f_k(x)$ آخرین تابع غیرصفر استرم می‌باشد. ریشه‌های متمایز را با استفاده از ۸-۱-۱ تحلیل می‌نمائیم.

ج: با استفاده از قضایای ۱۳ تا ۱۵ ریشه‌های $f_k(x)$ را از f(x) جدا می‌نمائیم و الف و ب را در مورد ریشه‌های متمایز بکار می‌بریم.

مثال ۸-۲

پولی‌نومیال $f(x)= x^3- 6x^2+9x-4$ را در نظر گرفته روش استرم را برای آن بکار برید.

با استفاده از (۸۰):

$f_1(x)= 3x^2- 12x+9$
$f_2(x)= 2x-2$
$f_3(x)= 0$
$f_2(x)= 2x-2= 0 \implies x=1$

با استفاده از قضیه ۱۵، x=1 یک ریشه مضاعف f(x) است پس: $f(x)= (x-1)^2 (x-4)= 0$

پس ریشه دیگر برابر با $(x-4)= 0$ یا x=4 خواهد بود.

۸-۱-۳- ریشه‌های مختلط

یک معادله پولی‌نومیالی که دارای ریشه‌های مختلط باشد را به آسانی می‌توان به دو معادله پولی‌نومیال همزمان دو متغیره تبدیل نمود که دارای ریشه‌های حقیقی باشند. برای روشن

شدن این موضوع مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۸-۳

معادله پولی‌نومیال $x^2-2x+5=0$ داده شده است. می‌دانیم که این پولی‌نومیال دارای ریشه‌های مختلط می‌باشد. این ریشه‌ها را به این ترتیب می‌توان پیدا کرد. اگر ریشه مختلط داشته باشیم برابر خواهد بود با:
$x'=c+di, \quad x''=c-di$

مقدار x' را داخل معادله فوق گذاشته:

$$(c+di)^2-2(c+di)+5=0 \quad \Longrightarrow \quad c^2+2cdi-d^2-2c-2di+5=0$$

برای اینکه این معادله برقرار شود باید مجموع جملات حقیقی و موهومی تک به تک برابر صفر شوند پس می‌توان نوشت

$$\begin{cases} c^2-d^2-2c+5=0 \\ 2cdi-2di=0 \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق به جواب $c=1$ و $d=\pm 2$ خواهیم رسید پس ریشه‌های معادله برابرند با:

$$x'=1+2i, \quad x''=1-2i$$

این روش برای تمام پولی‌نومیال‌ها می‌تواند مورد استفاده واقع شود؛ ولی اشکالی که دارد این است که باید بتوانیم دستگاه معادلات جدید را حل کنیم. سپس با کنار گذاشتن ریشه‌های مختلط ریشه‌های حقیقی را بررسی می‌نمائیم.

۸-۲- آزمون ثبات پویای تعادل

اگر فقط بخواهیم بدانیم که معادله تفاضلی مورد نظر دارای روند زمانی همگرا می‌باشد یا خیر، می‌توان از قضیه زیر استفاده نمود:

قضیه ۱۶ قضیه شِر

ریشه‌های معادله پولی‌نومیال مرتبه nام $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$ دارای قدرمطلق کوچکتر از یک هستند اگر و فقط اگر n دترمینان زیر همگی مثبت باشند.

$$D_1=\begin{vmatrix} a_0 & \vdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \vdots & a_0 \end{vmatrix}>0, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_0 & 0 & \vdots & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & 0 & \vdots & 0 & a_n \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & \vdots & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & \vdots & 0 & a_0 \end{vmatrix}>0, \dots,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & \vdots & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & \vdots & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (۸۱)$$

تمرین ۹

۱- مقادیر زیر را برای معادله کرکتریستیک $x^3-3x^2-6x+4=0$ محاسبه کنید:

1- $V(-2)$ 2- $V(-1)$ 3- $V(+2)$ 4- $V(-\infty)$ 5- $V(\infty)$

۲- در مسئله ۱ پیدا کنید که آیا قدرمطلق ریشه منفی از ریشه مثبت بزرگتر بیشتر است یا خیر؟

۳- توابع استرم را برای معادلات پولی نومیال زیر بدست آورید.

1- $x^3-3x^2-3x-1=0$ 2- $x^3-3x+1=0$

۴- با استفاده از روش استرم نشان دهید که کلیه ریشه‌های معادلات مسئله قبل حقیقی هستند. این مطلب را به اثبات اینکه هر پولی‌نومیال $f(x)$ که پولی‌نومیال‌های استرم آن دارای ضریب مثبت در بزرگترین جمله خود باشند تعمیم دهید.

۵- توابع استرم را برای معادلات زیرا پیدا کنید.

1- x^3-3x^2+3x-1 2- x^3-3x^2+6x-4

۶- کدام یک از معادلات مسئله ۵ دارای ریشه‌های مختلط می‌باشند (چندتا)؟

۷- کدام یک از معادلات مسئله ۵ دارای ریشه‌های مضاعف می‌باشند (چندتا)؟

۸- با استفاده از قضیه شر نشان دهید که روند زمانی y_t معادله تفاضلی زیر همگرا نیست:

$y_{t+2}+3y_{t+1}+2y_t=12$

۹- با استفاده از قضیه شر نشان دهید که روند زمانی y_t معادله تفاضلی زیر همگرا می‌باشد:

$$y_{t+2}+\frac{1}{6}y_{t+1}-\frac{1}{6}y_t=2$$

۱۰- همگرائی روند زمانی معادلات تفاضلی تفاضلی زیر را آزمایش کنید:

1- $y_{t+2}+\frac{1}{2}y_{t+1}-\frac{1}{2}y_t=3$ 2- $y_{t+2}-\frac{1}{9}y_t=1$

۱۱-اگر معادله تفاضلی مرتبه ۳ را به شکل زیر بنویسیم دترمینان‌های شر را بدست آورید.

$y_{t+3}+a_1 y_{t+2}+a_2y_{t+1}+a_3y_t=c$

۹- معادلات تفاضلی خطی با جمله متغیر

تا بحال معادلات تفاضلی خطی همگن و غیرهمگن از مراتب مختلف را وقتی که ضرائب و جملات آن مقادیر ثابت بودند را بررسی کردیم. در این فصل به معادلات تفاضلی می‌پردازیم که دارای جمله متغیر می‌باشند. به عبارت دیگر جمله‌ای که معادله تفاضلی همگن را غیرهمگن می‌نماید خود تابعی از متغیر t می‌باشد.

۹-۱- روش ضرائب مجهول

معادله تفاضلی خطی مرتبه n را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y_t = a_1 y_{t+1} + a_2 y_{t+2} + \ldots + f(t) \qquad (۸۲)$$

که $f(t)$ یک جمله متغیر می‌باشد و تابعی از t تعریف می‌شود. اگر در معادله تفاضلی جملهٔ متغیری که تابعی از t باشد داشته باشیم تنها جواب خاص معادله تفاضلی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. روش ضرائب مجهول که در این قسمت به آن خواهیم پرداخت برای محاسبه جواب خاص کاربرد زیادی دارد. اگر $f(t)$ تابع مشخصی از t باشد روش ضرائب مجهول همانطور که خواهیم دید قابلیت خوبی برای یافتن جواب خاص خواهد داشت. در این حالت در ارتباط با هر جمله $f(t)$ یک جواب آزمایش با مقادیر دلخواه مجهول در نظر می‌گیریم که با جایگزینی در معادله تفاضلی غیرهمگن آنان را پیدا می‌کنیم.

۹-۱-۱- جمله متغیر cM^t

اگر $f(t) = cM^t$ باشد از (۸۲) داریم:

$$y_t = a_1 y_{t+1} + a_2 y_{t+2} + \ldots + a_n y_{t+n} + cM^t \qquad (۸۳)$$

که مقادیر $a_1, \ldots, a_n$,M ,c ثابت می‌باشند.

برای حل این معادله همانطور که توضیح داده شد باید تابع مکمل را پیدا کرده و جواب خاص را به آن بیافزاییم. چگونگی بدست آوردن تابع مکمل در فصول قبل توضیح داده شد. در اینجا به یافتن جواب خاص می‌پردازیم. اول باید تعیین کنیم که جواب خاص در زمان‌های مختلف دارای شکل خاصی خواهد بود یا نه؟ بدین منظور از جمله cM^t تفاضل‌های پیاپی می‌گیریم:

$D(cM^t)= cM^{t+1}- cM^t= c(M-1)M^t$

$D^2(cM^t)= D[c(M-1)M^t]= c(M-1)M^{t+1} – c(M-1)M^t= c(M-1)^2M^t$

همینطور برای تفاضل hام:

$D^h(cM^t)= c(M-1)^h M^t$

پس جمله cM^t در تفاضل‌های مختلف به شکل حاصل ضرب اعداد ثابتی مانند $c(M-1)^h$ در M^t خواهد شد. بدین ترتیب می‌توان $y_t= BM^t$ را به عنوان جواب آزمایش بکار برد که B عدد ثابت نامعلوم می‌باشد. این مقدار را در معادله (۸۳) جایگزین می کنیم:

$BM^t= a_1BM^{t+1}+ a_2BM^{t+2}+ …+ a_nBM^{t+n}+ …+ cM^t$

پس دو طرف را بر M^t تقسیم می کنیم و B را حساب می کنیم.

$$B= \frac{c}{1-a_1M-a_2M^2-...-a_nM^n}$$

بدین ترتیب جواب خاص از قرار ذیل خواهد بود.

$$y_p= BM^t= \frac{cM^t}{1-a_1M-a_2M^2-...-a_nM^n} , \quad a_1M_1+ a_2M^2+ …+ a_nM^n \neq 1 \qquad (۸۴)$$

برای امتحان درست بودن جواب می‌توان آن را در معادله تفاضلی قرار داد و به نتیجه $cM^t=cM^t$ رسید. در صورتی که مخرج مساوی صفر شد می‌دانیم که همانند قبل در مورد یافتن جواب خاص عدد ثابت M مساوی یک ریشه پولی‌نومیال کرکتریستیک مرتبط با معادله تفاضلی می‌باشد. در این حالت جواب آزمایشی $y_t= BtM^t$ را آزمایش می کنیم:

$$BtM^t- a_1B(t+1)M^{t+1}-…-a_nB(t+n)M^{t+n}=cM^t \implies B= \frac{c}{t-a_1(t+1)M-...-a_n(t+n)M^t}$$

و جواب خاص برابر خواهد شد با:

$$y_p=BtM^t=\frac{ctM^t}{t-a_1(t+1)M-...-a_n(t+n)M^n}$$

به همین ترتیب باید در این حالت نیز مخرج مخالف صفر باشد یعنی:

$t-a_1(t+1)M - …- a_n (t+n)M^n \neq 0$

اگر مجدداً مخرج مساوی صفر شد باید جواب آزمایش $y_t= Bt^2M^t$ را آزمایش کنیم و اگر این جواب هم همانند فوق شکست خورد جواب $y_t= Bt^3M^t$ را آزمایش می‌کنیم. این روش را تا $y_t= Bt^nM^t$ می‌توان ادامه داد. که نهایتاً یکی از آنها می‌تواند جواب مورد قبول واقع شود.

معادلات از نوع (۸۳) دارای تعادل متحرک می‌باشند بدین ترتیب که در زمان t=0 تعادل در c، در زمان t=1 تعادل در cM و همینطور در زمان t تعادل در cM^t خواهد بود.

مثال ۹-۱

معادله تفاضلی $y_{t+2} -4y_t -3(4)^t= 0$ را حل کنید ($y_0= 2$ و $y_1=\frac{3}{2}$):

جواب خاص $y_p= B(4)^t$ را آزمایش می‌کنیم:

$$B(4)^{t+2} -4B(4)^t -3(4)^t= 0 \implies B= \frac{12}{16-16}$$

ولی مخرج مساوی صفر می‌گردد پس باید جواب آزمایش دیگری را بکار ببریم: $y_t= B_t(4)^t$

$$B(t+2)(4)^{t+2} - 4Bt(4)^t -3(4)^4)= 0 \implies B= \frac{3}{8}$$

پس جواب خاص برابر $y_p=\frac{3}{8}t(4)^t$ خواهد بود. حال تابع مکمل را محاسبه می‌کنیم. همانطور که گفته شد تابع مکمل تحت تأثیر جمله غیرثابت $3(4)^t$ قرار نمی‌گیرد پس معادله $y_{t+2}-4y_t=0$ را حل نموده تا تابع مکمل بدست آید.

$$y_t= x^t \implies x^{t+2} -4x^t= 0 \implies x= \pm 2 \implies y_c= a(2)^t + b(-c)^t$$

جواب عمومی ($y_t= y_c+ y_p$) را بدست می‌آوریم: $y_t= a(2)^t + b(-c)^t+ \frac{3}{8}t(4)^t$

جواب معین با استفاده از شرایط اولیه و پیدا کردن مقادیر a,b حاصل می‌شود.

$$y_0= a(2)^0 + b(-c)^0 +\frac{3}{8}(0)\,(4)^0= 2$$

$$y_1= a(2)^1 +b(-c)^1+ \frac{3}{8}(1)\,(4)^1= \frac{3}{2} \qquad \implies a=1,\ b=1$$

بدین ترتیب جواب مسئله عبارت خواهد بود از: $y_t= (2)^t + (-2)^t +\frac{3}{8}t(4)^t$

۹-۱-۲- جملهٔ متغیر ct^M

معادله (۸۲) را در نظر بگیرید که $f(t) = ct^M$ و C , M اعداد ثابتی باشند:

$$y_t= a_1y_{t+1} +a_2y_{t+2}+ \ldots + a_ny_{t+n}+ ct^M \qquad (۸۵)$$

همانند معادله (۸۳) تأثیر ct^M بر روی جواب خاص خواهد بود. بدین ترتیب شکل جمله مورد نظر را در زمان‌های مختلف بررسی می‌کنیم. بدین منظور از جمله ct^M تفاضل‌های پیاپی می‌گیریم: $\Delta(ct^M)= c(t+1)^M- ct^M$

اگر برای بسط پرانتز اول از بینم نیوتن استفاده کنیم و عبارت $\frac{M!}{r!(M-r)!}$ را با $\binom{M}{r}$ نشان دهیم تفاضل فوق به شکل زیر می‌شود:

$$\Delta(ct^M) = c\sum_{r=0}^{M}\binom{M}{r} t^r - ct^M$$

چون جمله Mام $\sum$ برابر خواهد بود با:

$$c\binom{M}{M}t^M = ct^M$$

تفاضل فوق به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\Delta(ct^M) = c\sum_{r=0}^{M-1}\binom{M}{r} t^r$$

تفاضل دوم به شکل زیر است:

$$\Delta^2(ct^M) = \Delta(\Delta ct^M) = \Delta\left[c\sum_{r=0}^{M-1}\binom{M}{r} t^r\right] = \Delta\left[c\sum_{r=1}^{M-1}\binom{M}{r} t^r\right]$$

چون 0= (ثابت)Δ و $t^0=1$ می‌باشد. پس:

$$\Delta^2(ct^M) = c\sum_{r=1}^{M-1}\binom{M}{r}(t+1)^r - c\sum_{r=1}^{M-1}\binom{M}{r} t^r$$

اگر $(t+1)^r$ را دوباره توسط دستور بینم نیوتن بسط دهیم به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\Delta^2(ct^M) = c\sum_{r=1}^{M-1}\binom{M}{r}\left[\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k} t^k\right] - c\sum_{r=1}^{M-1}\binom{M}{r} t^r$$

زمانی که k=r شود جمله $c\sum_{r=1}^{M-1}\binom{M}{r}\binom{r}{r}t^r$ با سمت راست‌ترین جمله حذف خواهد شد و:

$$\Delta^2(ct^M) = c\sum_{r=1}^{M-1}\binom{M}{r}\left[\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r}{k} t^k\right]$$

به همین ترتیب مرتبه تفاضل که بالاتر می‌رود درجه پولی‌نومیالی که از بسط بینم پیدا می‌شود پائین می‌آید تا مقدار تفاضل مرتبه (M+1)ام برابر صفر می‌شود. بدین ترتیب جملاتی که در تفاضل‌های مختلف پیدا می‌شود به شکل B_0 , B_1t , B_2t^2 , … , B_Mt^M می‌باشد. پس جواب آزمایشی زیر را برای بدست آوردن جواب خاص امتحان می‌نمائیم:

$$y_t = B_0 + B_1t + B_2t^2 + \ldots + B_Mt^M \qquad (۸۶)$$

مقدار (۸۶) را در (۸۵) برای tهای لازم قرار می‌دهیم. پولی‌نومیال زیر بدست می‌آید:

$$(B_0 + B_1t + B_2t^2 + \ldots + B_Mt^M) =$$
$$a_1[B_0+B_1(t+1)+\ldots+B_M(t+1)^M]+\ldots+a_n[B_0+B_1(t+n)+\ldots+B_m(t+n)^M] + ct^M \qquad (۸۷)$$

پولی‌نومیال (۸۷) را مرتبط نموده ct^M را در سمت راست و باقی جملات را در سمت چپ نگهداری می‌نمائیم. پولی‌نومیال مربوطه به شکل زیر شبیه خواهد بود.

$f_0(B_0 , B_1 , b_m)t^0 + f_1(B_1 , \ldots, B_m)t^1 + \ldots + f_M(B_M)t^M = ct^M$

از مقایسه سمت چپ و راست ضرائب $t^0 , t^1 ,\ldots, t^M$ در سمت چپ را مساوی مقادیر معادل آنها در سمت راست قرار می‌دهیم. دستگاه معادلات همزمان برحسب $B_0,B_1,\ldots,B_M$ پیدا می‌شود.

$f_0(B_0 , B_1 , \ldots , B_m) = 0$
$f_1(B_1 , \ldots, B_m) = 0$
::::::::::::::::::::
$f_M(B_M) = c$

از حل M+1 معادله فوق مقادیر B_0 تا B_M را محاسبه نموده و در (۸۶) قرار می‌دهیم تا جواب خاص بدست آید. اگر در پیدا کردن مقادیر B_0 تا B_m پولی‌نومیال (۸۷) شکست خورد جواب آزمایشی زیر را بکار می‌بریم:

$$y_t = t(B_0 + B_1t + \ldots + B_Mt^M) \qquad (۸۸)$$

و این عمل را می‌توان همانند معادلات دیگر به شکل حاصلضرب توانی از t در جواب آزمایشی تا مرحله nام تکرار نمود و این در صورتی است که t^1 و t^2 و ... و t^{n-1} نیز در پیدا کردن مقادیر B_0 تا B_M شکست بخورند. جواب‌های زیر را یکی پس از دیگری می‌توان آزمایش نمود:

$$y_t = t^2 (B_0 + B_1t + \ldots + B_Mt^M)$$
::::::::::::::::::::::::::::::::::::::: (۸۹)
$$y_t = t^n (B_0 + B_1t + \ldots + B_Mt^M)$$

مثال ۹–۲

جواب خاص معادله تفاضلی $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = t^2$ را پیدا کنید:

$$\Delta(t^2) = (t+1)^2 - t^2 = 2t+1$$
$$\Delta^2(t^2) = \Delta(\Delta t^2) = \Delta(2t+1) = \Delta(2t) + \Delta(1) = 2$$
$$\Delta^3(t^2) = \Delta(\Delta^2 t^2) = \Delta(2) = 0$$

پس جواب آزمایشی $y_t = B_0 + B_1t + B_2t^2$ را آزمایش می‌کنیم چون در عملیات فوق یک جمله t^2 (خود جمله متغیر) و از تفاضل مرتبه اول آن یک جمله t و از تفاضل مرتبه دوم یک جمله ثابت داشتیم پس بترتیب پارامترهای B_0 , B_1 , B_2 را در جواب آزمایشی بکار بردیم. حال مقدار y را در زمان‌های $t+1,\ t+2$ نیز بدست می‌آوریم و آنها را در معادله تفاضلی غیرهمگن صورت مسئله جایگزین می‌کنیم:

$$(8B_0 + 7B_1 + 9B_2) + (7B_1 + 14B_2)t + 8B_2t^2 = t^2$$

با مقایسه سمت چپ و راست معادله و از مساوی قراردادن مقادیر ضرائب t خواهیم داشت:

$8B_0 + 7B_1 + 9B2 = 0 \qquad 8B_1 + 14B_2 = 0 \qquad 8B_2 = 1$

از حل این دستگاه مقادیر B_0, B_1, B_2 به ترتیب برابر خواهند بود با: $\frac{13}{256}$ و $-\frac{7}{32}$ و $\frac{1}{8}$.

پس جواب خاص از این قرار است:

$$y_p = \frac{13}{256} - \frac{7}{32}t + \frac{1}{8}t^2$$

۹-۱-۳- جملات متغیر $cM^t + dt^K$

اشکال ریاضی مختلفی را می‌توان بعنوان جملات متغیر تعریف نمود و به دنبال فرمول‌های کلی برای حل آنها بود. جملات متغیری که در معادلات تفاضلی در قسمت قبل آورده شدند مثال‌های خوبی برای حل اینگونه مسائل می‌باشند. اشکال دیگری را در این قسمت بررسی می‌کنیم که تمرین‌هائی برای حل معادلات تفاضلی با جملات متغیر می‌باشند. بطور کلی همانند قبل در حل اینگونه معادلات تفاضل‌های پیاپی آن آزمایش می‌شود و از آن تعداد پارامترهائی که برای حل معادله تفاضلی با توجه به جمله متغیر لازم می‌باشد بدست می‌آید. اگر داشته باشیم $f(t)=cM^t+dt^K$ معادله تفاضلی (۸۲) به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$y_t = a_1y_{t+1} + a_2y_{t+2} + \ldots + a_ny_{t+n} + cM^t + dt^K \qquad (۹۰)$$

در این حالت جواب آزمایشی چگونه بدست می‌آید؟ برای پیدا کردن جواب خاص همانطور که گفته شد تفاضل‌های پیاپی جملات متغیر را بدست می‌آوریم.

$$\Delta(cM^t + dt^K) = \Delta(cM^t) + \Delta(dt^k)$$
$$\Delta^2(cM^t + dt^K) = \Delta^2(cM^t) + \Delta^2(dt^K)$$
$$::$$
$$\Delta^K(cM^t + dt^K) = \Delta^K(cM^t) + \Delta^K(dt^K)$$

بدین ترتیب تفاضل مجموع دو جمله متغیر در تمام مراتب برابر شد با مجموع تفاضل‌های آنان در همان مرتبه. پس جواب آزمایشی را می‌توان با استفاده از قسمت‌های (۹-۱-۱) و (۹-۱-۲) بدست آورد. بدین ترتیب جواب آزمایشی برابر خواهد بود با:

$$y_t = (BM^t) + (B_0 + B_1t + \ldots + B_Kt^K) \qquad (۹۱)$$

از توضیح این مطلب خودداری می‌شود و بسط آن به خواننده واگذار می‌گردد. لازم به تذکر است که اگر جواب آزمایشی فوق موفق به پیدا کردن مقادیر B_0 و B_1 و ... و B_K نشود جواب آزمایش بعدی را بکار می‌بریم به این صورت که جواب فوق در t ضرب شود:

$y_t= t[BM^t+ B_0+ B_1t +\ldots+ B_Kt^K]$ (۹۲)

در صورت شکست، این عمل را در مراحل بعد نیز با توان‌های بالاتری از t می‌توان تکرار نمود:

$y_t= t^2 [BM^t+ B_0+ B_1t+ \ldots+ B_Kt^K]$ (۹۴)

الی آخر.

۹-۱-۴- جملات متغیر $c_0t^K +c_1t^{K-1}+\ldots+c_K$

معادله (۸۲) را در نظر بگیرید که در آن $f(t)=c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K$ که K و c_0 و...و c_K اعداد ثابتی هستند و K عدد صحیح می‌باشد. معادله تفاضلی شکل زیر را خواهد داشت:

$y_t= a_1y_{t+1}+\ldots+a_ny_{t+n}+ c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K$ (۹۴)

جواب آزمایشی در این حالت همانند (۸۶) خواهد بود به عبارت دیگر:

$y_t= B_0+ B_1t+B_2t^2+\ldots+ B_Kt^K$ (۹۵)

چنانچه مجدداً موفق به یافتن جواب‌هائی برای B_0 و .. و B_K نشدیم می‌توان سمت راست عبارت فوق را در t یا توانهائی از t ضرب کرد و مجدداً برای محاسبه ضرائب B_0 و .. و B_K اقدام نمود.

مثال ۹-۳

اگر داشته باشیم: $f(t)=d_0+d_1t+d_2t^2$ معادله تفاضلی (۸۲) وقتی $n=1$ باشد به شکل زیر تبدیل خواهد شد: $y_t= ay_{t+1}+d_0+d_1t+d_2t^2$

جواب خاص چگونه بدست می‌آید؟ تفاضل‌های مختلف را ارزیابی می‌کنیم:

$$\Delta (d_0+d_1t+d_2t^2) = 0+\Delta(d_1t)+\Delta(d_2t^2)=d_1(t+1)-d_1(t)+d_2(t+1)^2-d_2(t)^t= d_1+d_2+2td_2$$
$$\Delta^2(d_0+d_1t+d_2t^2) = \Delta(d_1+d_2+2td_2)= 2d_2(t+1)–2d_2(t)= 2d_2$$
$$\Delta^3(d_0+d_1t+d_2t^2) = \Delta(2d_2) = 0$$

بدین ترتیب چون تفاضل‌های مختلف و خود قسمت جملات متغیر دارای جملاتی نظیر t , t^2 و عدد ثابت دارند جواب آزمایشی برای آنها نظیر جملهٔ متغیر ct^M خواهد بود.

$$y_t= B_0+ B_1t+ B_2t^2$$

می‌توانیم همچنین بنویسیم: $y_{t+1}=B_0+B_1(t+1)+B_2(t+1)^2=B_0+B_1+B_2+(B_1+2B_2)t+B_2t^2$

با جایگزینی در صورت مسئله داریم:

$$B_0+B_1t+B_2t^2 – a[B_0+B_1+B_2+(B_1+2B_2)t+B_2t^2] = d_0+d_1t+d_2t^2$$
$$B_0-a(B_0+B_1+B_2) + [B_1-a(B_1+2B_2)]t + B_2(1-a)t^2 = d_0+d_1t+d_2t^2$$

با مساوی قرار دادن ضرائب tهای همدرجه در چپ و راست مقادیر B_0 و B_1 و B_2 پیدا می‌شود:

$$B_0-a(B_0+B_1+B_2)=d_0 \qquad B_1-a(B_1+2B_2)=d_1 \qquad B_2(1-a)=d_2$$

اگر $a \neq 1$ باشد مقادیر B_2, B_1, B_0 برابرند با:

$$B_0 = \frac{a\left[\dfrac{d_1(1-a)+2a_1 d_2}{(1-a)^2}\right] + a\left(\dfrac{d_2}{1-a}\right) + d_0}{(1-a)} = g_0 \qquad a \neq 1$$

$$B_1 = \frac{d_1(1-a)+2ad_2}{(1-a)^2} = g_1 \qquad\qquad B_2 = \frac{d_2}{1-a} = g_2$$

پس جواب خاص برابر خواهد بود با: $y_p = g_0 + g_1 t + g_2 t^2$

اگر $a=1$ باشد باید جواب‌های نظیر (۸۸) و (۸۹) را بجای نظیر (۸۶) که استفاده شد بکار برد.

۹-۱-۵- جملات متغیر $cM^t+c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K$

اگر $f(t)$ در (۸۲) برابر $cM^t+c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K$ باشد یا به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$y_t = a_1y_{t+1}+\ldots+a_ny_{t+n} + cM^t+c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K \qquad (۹۶)$$

جواب آزمایشی معادل (۹۱) خواهد بود. و یا به عبارت دیگر:

$$y_t = (BM^t) + (B_0 + B_1t + \ldots + B_kt^k) \qquad (۹۷)$$

مثال ۹-۴

جواب خاص معادله تفاضلی $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = 3t^2 + 2 - 5(3)^t$ را پیدا کنید.

با توجه به پولی‌نومیال $2+3t^2$ در سمت راست معادله فوق جواب آزمایشی زیر را در نظر می‌گیریم: $B_0+B_1t+B_2t^2$

با توجه به جمله $-5(3)^t$ عبارت $B(3)^t$ را برای جواب آزمایشی در نظر می‌گیریم. جواب آزمایشی به این شکل خواهد شد: $y_t = B(3)^t+B_0+B_1t+B_2t^2$

مقادیر y_{t+1} و y_{t+2} را نیز حساب کرده و در معادله تفاضلی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
&y_{t+2}-6y_{t+1}+8y_t = B_2(t+2)^2+B_1(t+2)+B_0+B(3)^{t+2}\\
&-6[B_2(t+1)^2+B_1(t+1)+B_0+B(3)^{t+1}] + 8[B_2t^2+B_1t+B_0+B(3)^t]\\
&= 3B_2t + (3B_1-8B_2)t + 3B_0 - 4B_1 - 2B_2 - B(3)^t
\end{aligned}$$

چون عبارت فوق باید معادل سمت راست معادله تفاضلی شود باید داشته باشیم:

$$3t^2 + 2 - 5(3)^t = 3B_2t^2+3B_2t^2+(3B_1-8B_2)t+3B_0-4B_1-2B_2-B(3)^t$$

ضرائب جملات نظیر به هم را مساوی قرار داده:

$$\left\{\begin{array}{l} 3B_2 = 3\\ 3B_1 - 8B_2 = 0\\ 3B_0 - 4B_1 - 2B_2 = 2\\ B = 5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \\ ==> \\ ==> \\ \\ \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} B = 5\\ B_0 = 44/9\\ B_1 = 8/3\\ B_2 = 1 \end{array}\right.$$

جواب خاص برابر خواهد بود با: $y_p = t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{44}{9} + 5(3)^t$

۹-۱-۶- جملات متغیر $cM^t(c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K)$

اگر $f(t)$ در (۸۲) برابر با $cM^t(c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K)$ باشد و یا بعبارت دیگر داشته باشیم:

$$y_t= a_1y_{t+1}+\ldots+a_ny_{t+n} +cM^t(c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K) \tag{۹۸}$$

جواب آزمایشی زیر را می‌توان امتحان نمود:

$$y_t= BM^t(B_0+B_1t +\ldots+ B_Kt^K) \tag{۹۹}$$

۹-۱-۷- جملات متغیر $c_1M_1^t+\ldots+c_KM_K^t$

اگر $f(t)$ در (۸۲) برابر با $c_1M_1^t+\ldots+c_KM_K^t$ باشد معادله تفاضلی مورد نظر به شکل زیر خواهد بود: $y_t= a_ny_{t+1} +\ldots+ a_ny_{t+n}+ c_1M_1^t + \ldots+ c_KM_K^t$

جواب آزمایشی روبرو را برای جواب خاص امتحان می‌کنیم: $y_t= B_1M_1^t +\ldots+ B_KM_K^t$

مثال ۹-۵

معادله تفاضلی $y_{t+2} - 4y_{t+1}+ 4y_t= 3(2)^t+ 5(4)^t$ را حل کنید.

معادله کرکتریستیک معادله فوق برای جواب مکمل برابر $x^2- 4x + 4= 0$ خواهد بود. به عبارت دیگر: $x'= x''= 2$

چون ریشه‌ها مضاعف هستند جواب مکمل برابر خواهد بود با: $y_c= c_12^t+ c_2t_2^t$

برای بدست آوردن جواب خاص با توجه به جمله $3(2)^t$ در سمت راست معادله تفاضلی جواب آزمایش B_12^t را انتخاب می‌کنیم. چون این جمله در جواب مکمل y_c وجود دارد آنرا در t ضرب می‌کنیم. جواب آزمایشی می‌شود $B_1t^2(2)^t$. در ارتباط با جمله $5(4)^t$ جواب آزمایشی $B_2(4)^t$ را نیز بکار می‌بریم. پس بطور کلی جواب آزمایشی برابر خواهد بود با:

$$y_t= B_1t^2(2)^t+ B_2(4)^t$$

این معادله را در معادله تفاضلی جایگزین می‌کنیم:

$$y_{t+2}-4y_{t+1}+4y_t=$$
$$B_1(t+2)^2(2)^{t+2} + B_2(4)^{t+2} -4[B_1(t+1)^2(2)^{t+1}+B_2(4)^{t+1}]+4 [B_1(t)^2(2)^t+B_2(4)^t]=$$
$$8B_12^t + 4B_2(4)^t$$

پس باید داشته باشیم: $8B_1(2)^t + 4B_2(4)^t= 3(2)^t+5(4)^t$

که $B_1= \frac{3}{8}, B_2= \frac{5}{4}$

پس جواب عمومی برابر خواهد بود با:

$$y_t = c_1(2)^t + c_2 t\,(2)^t + \left(\frac{3}{8}\right)t^2(2)^t + \left(\frac{5}{4}\right)(4)^t$$

یا

$$y_t = c_1(2)^t + c_2 t\,(2)^t + 3t^2(2)^{t-3} + 5(4)^{t-1}$$

۹-۱-۸- جمله متغیر $M\,Cos\,a\,t$ یا $M\,Sin\,a\,t$

اگر f(t) در معادله (۸۲) $M\,Sin\,a\,t$ یا $M\,Cos\,a\,t$ باشد یا به عبارت دیگر:

$$y_t = a_1 y_{t+1} + \ldots + a_n y_{t+n} + M\,Sin\,a\,t$$
$$y_t = a_1 y_{t+1} + \ldots + a_n y_{t+n} + M\,Cos\,a\,t \qquad (۱۰۰)$$

جواب آزمایشی را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$y_t = A\,Cos\,a\,t + B\,Sin\,a\,t \qquad (۱۰۱)$$

۹-۱-۹- جمله متغیر $c^t\,Cos\,a\,t$ یا $c^t\,Sin\,a\,t$

اگر f(t) در (۸۲) برابر باشد با $c^t\,Cos\,a\,t$ یا $c^t\,Sin\,a\,t$ یا به عبارت دیگر:

$$y_t = a_1 t_{t+1} + \ldots + a_n y_{t+n} + c^t\,Cos\,a\,t$$
$$y_t = a_1 t_{t+1} + \ldots + a_n y_{t+n} + c^t\,Sin\,a\,t \qquad (۱۰۲)$$

جواب آزمایش را می‌توان به شکل زیر در نظرگرفت:

$$y_t = c^t(A\,Cos\,a\,t + B\,Sin\,a\,t) \qquad (۱۰۳)$$

۹-۱-۱۰- بحث در روش ضرائب مجهول

روشهائی را که برای پیدا کردن جواب خاص در قسمت‌های قبلی توضیح دادیم روش ضرائب مجهول بود. روش کلی به این شکل بود که در ازاء هر جمله‌ای که در تابع f(t) وجود داشت یک جواب آزمایشی شامل تعدادی ضرائب ثابت مجهول که با جایگزینی درون معادله تفاضلی پیدا می‌شدند را تشکیل می‌دادیم. دیدیم که در شرایط خاصی بعضی جواب‌های آزمایشی شکست می‌خوردند و نمی‌توانستند به ازاء مقادیر خاص ضرائب مجهول معادله تفاضلی را برآورده کنند. در این حالت توانی از t را در جواب آزمایشی یا جمله مورد نظر جواب آزمایشی ضرب می‌کردیم و مجدداً آنرا در معادله تفاضلی می‌آزمودیم. بطور کلی این مسئله را می‌توان بدین شکل مطرح نمود که در کلیه حالت‌های فوق جواب آزمایشی باید طوری انتخاب شود که جملات آن در تابع مکمل نباشد. اگر چنین بود جواب آزمایشی شکست می‌خورد. اگر هر جمله‌ای از جواب آزمایشی مشابه یکی از جملات تابع مکمل بود

باید آن جمله را در توانی صحیح و مثبت از t ضرب کرد. این توان باید به اندازه کافی بزرگ باشد که مجدداً جواب آزمایشی جدید محتوی جمله‌ای نباشد که مشابه آن جمله درون تابع مکمل وجود داشته باشد.

تمرین ۱۰

۱- معادلات زیر را با استفاده از روش ضرائب مجهول حل کنید.

1: $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 4^t$

2: $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = t^2$

3: $4y_{t+2} + y_t = 2t^2 - 5t+3$

4: $y_{t+1} - y_t = t \qquad y_0 = 1$

5: $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = t+2^t$

6: $y_{t+2} - 8y_{t+1} + 16y_t = 3(4)^t$

7: $2y_{t+2} - 3y_{t+1} + y_t = t^2 - 4t+3$

8: $y_{t+2} + 4y_t = 5(-3)^t + 10t$

9: $y_{t+2} - y_t = (1/3)^t$

10: $y_{t=2} + y_t = 4 \text{ Cos } 2t$

11: $y_{t+3} - 6y_{t+2} + 11y_{t+1} - 6y_t = 4t+3(2)^t - 5^t$

12: $y_{t+4} - 16y_t = t^2 - 5t+2 - 4(3)^t$

13: $y_{t+3} + y_t = 2^t \text{ Cos } 3t$

14: $3y_{t+4} - 4y_{t+2} + y_t = 3^t (t-1)$

۲- معادله تفاضلی $y_{t+1} - ay_t = b$ را برای تمام مقادیر a , b حل کنید.

۹-۲- روش استفاده از اپراتورها

معادلات تفاضلی خطی را می‌توان با استفاده از اپراتور انتقال به شکل زیر نوشت:

$$f(E)\, y_t = f(t) \tag{۱۰۴}$$

که $f(E)$ تابعی از اپراتور E می‌باشد. برای مثال معادله (۸۲) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$a_n y_{t+n} + \ldots + a_2 y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = f(t) \tag{۱۰۵}$$

معادله فوق را می‌توان عیناً به شکل زیر نوشت:

$$(a_n E^n + \ldots + a_2 E^2 + a_1 E + a_0) y_t = f(t) \tag{۱۰۶}$$

که پرانتز سمت چپ (۱۰۶) به عنوان $f(E)$ در (۱۰۴) تعریف شده است:

$$f(E) = a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + \ldots + a_2 E^2 + a_1 E + a_0 \tag{۱۰۷}$$

برای مثال معادله تفاضلی $6y_{t+3} - 15y_{t+2} + 8y_{t+1} + 4y_t = 0$ را با استفاده از اپراتور انتقال می‌توان به شکل زیر نوشت: $(6E^3 - 15E^2 + 8E + 4)\, y_t = 0$

حال اپراتور $\dfrac{1}{f(E)}$ را به عنوان معکوس $f(E)$ تعریف می‌کنیم بدین شکل:

$$\frac{1}{f(E)} f(t) = U\,, \qquad f(E)\, U = f(t) \tag{۱۰۸}$$

فرض خواهیم کرد که U دارای ثابت دلخواه نیست و بنابراین جواب خاص معادلهٔ (۱۰۵)

می‌باشد. اپراتور $\frac{1}{f(E)}$ یک اپراتور خطی می‌باشد برای تابع f(t) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{f(E)} f_1(t)= U_1 \ , \ \frac{1}{f(E)} f_2(t)= U_2$$

بر اساس (۱۰۸) می‌توان نوشت: $f(E)\, U_1= f_1(t)\ ,\ f(E)\, U_2= f_2(t)$

چون $f(E)$ یک اپراتور خطی است می‌توانیم بنویسیم: $f(E)\,[U_1+U_2] = f_1(t)+f_2(t)$

پس: $\frac{1}{f(E)} [f_1(t) + f_2(t)]= U_1+ U_2$

و یا: $\frac{1}{f(E)} [f_1(t) +f_2(t)]= \frac{1}{f(E)} f_1(t) + \frac{1}{f(E)} f_2(t)$

از طرفی اگر a مقدار ثابت غیرصفر باشد برای تابع f(t) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{f(E)}\, a\, f(t)= U \quad ==> \quad f(E)\, U= a\, f(t)$$

دو طرف را بر a تقسیم می‌کنیم: $f(E)\,\frac{U}{a} =f(t)$

یا $\frac{1}{f(E)} f(t)= \frac{U}{a} \quad ==> \quad a\,\frac{1}{f(E)} f(t)=U$

پس $\frac{1}{f(E)}\,\alpha\, f(t) = U = \alpha\,\frac{1}{f(E)} f(t)$

پس نتیجه می‌گیریم که $\frac{1}{f(E)}$ یک اپراتور خطی است. معرفی چنین اپراتوری در مواقعی که f(t) اشکال خاصی را دارد در پیدا کردن جواب خاص معادلات تفاضلی می‌تواند مورد استفاده واقع شود. حال به ذکر چند نمونه می‌پردازیم.

۹-۲-۱- جملات متغیر cM^t

اگر در معادله (۱۰۵) مقدار f(t) برابر با cM^t باشد می‌توانیم از روش فوق برای بدست آوردن جواب خاص استفاده کنیم. $f(E)$ را همانند (۱۰۷) در نظر بگیرید. می‌توانیم نشان دهیم که: $f(E)\, cM^t= f(M)\, cM^t$

زیرا: $EM^t= M^{t+1}= M.M^t\ ,\ E^2M^t= M^{t+2}= M^2.M^t\ ,...,\ E^nM^t= M^{t+n} = M^n.M^t$

پس: $f(E)\, M^t= (a_nE^n+ a_{n-1}E^{n-1}+\ldots+a_0)M^t = (a_nM^n+ a_{n-1}M^{n-1}+\ldots+a_0)M^t= f(M)\, M^t$

جواب خاص معادله تفاضلی (۱۰۴) برابر خواهد بود با:

$$y_p = \frac{1}{f(E)} cM^t = \frac{1}{f(M)} cM^t \quad , f(M) \neq 0 \qquad (۱۰۹)$$

زیرا از روابط فوق و خطی بودن اپراتور $f(E)$ و $\frac{1}{f(E)}$ واضح است که:

$$f(E)\, cM^t = f(M)\, cM^t$$

و رابطه (۱۰۹) بدست می‌آید.

مثال ۹-۶

جواب خاص معادله تفاضلی $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 5y_t = 2(3)^t - 4(7)^t$ را پیدا کنید.

معادله زیر را می‌توان به شکل زیر نوشت: $(E^2 - 2E+5)\, y_t = 2(3)^t - 4(7)^t$

جواب خاص از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y_p = \frac{1}{E^2 - 2E + 5}[2(3)^6 - 4(7)^t] = \frac{2}{E^2 - 2E + 5} 3^t - \frac{4}{E^2 - 2E + 5} 7^t$$

$$= \frac{2}{3^2 - 2(3) + 5}\, 3^t - \frac{4}{7^2 - 2(7) + 5} 7^t = \frac{3^t}{4} - \frac{7^t}{10}$$

چنانچه $f(M) = 0$ باشد باید از روشی که در قسمت ۹-۲-۴ توضیح داده می‌شود استفاده نمود. حال توجه کنید که اگر جمله متغیر M^t در تابع دیگری از t مانند $F(t)$ ضرب شده باشد با توجه به (۱۰۵) و (۱۰۷) عبارت زیر نیز برقرار خواهد بود:

$$f(E)\, [M^t F(t)] = M^t\, f(ME)\, F(t) \qquad (۱۱۰)$$

زیرا می‌توانیم بنویسیم:

$$EM^t F(t) = M^{t+1} F(t+1) = M^t [MEF(t)]$$

$$E^2 M^t F(t) = M^{t+2} F(t+2) = M^t [M^2E^2F(t)]$$

::

$$E^n M^t F(t) = M^{t+n} F(t+n) = M^t [M^n E^n F(t)]$$

پس:

$$f(E)\, [M^t F(t)] = (a_n E^n + a_{n-1} E^{n-1} + \ldots + a_0)\, [M^t F(t)]$$

$$= M^t\, [a_n (ME)^n + a_{n-1}(ME)^{n-1} + \ldots + a_0]\, F(t) = M^t\, f(ME)\, F(t)$$

و (۱۱۰) اثبات می‌شود. و همچنین مقدار زیر نیز برقرار خواهد بود:

$$\frac{1}{f(E)} M^t F(t) = M^t \frac{1}{f(ME)} F(t) \qquad (۱۱۱)$$

زیرا اگر قرار دهیم: $G(t)=\frac{1}{f(ME)}F(t)$

و بنابر آن $f(ME)\,G(t)=F(t)$

با استفاده از رابطه (۱۱۰) می‌توان نوشت: $f(E)\,[M^tG(t)]=M^t f(ME)\,G(t)=M^t F(t)$

بدین ترتیب: $\frac{1}{f(E)}M^tF(t)=M^tG(t)=M^t\frac{1}{f(ME)}F(t)$

مثال ۹-۷

جواب خاص معادله تفاضلی $y_{t+2}-4y_{t+1}+4y_t=2^t$ را بدست آورید.

معادله فوق را به این شکل می‌نویسیم: $(E^2-4E+4)\,y_t=2^t$

جواب خاص با استفاده از (۱۰۹) برابر خواهد بود با: $y_p=\frac{1}{E^2-4E+4}2^t=\frac{2^t}{2^2-4(2)+4}=\frac{2^t}{0}$

ولی مخرج کسر $f(2)$ مساوی صفر است. پس باید از روش دیگری استفاده کنیم. در این حالت از روابط (۱۱۰) و (۱۱۱) استفاده می‌کنیم. قرار دهید $F(t)=1$, $M=2$. با استفاده از (۱۱۱) می‌توان نوشت:

$$y_p=\frac{1}{f(E)}2^t=2^t\frac{1}{f(2E)}(1)=2^t\frac{1}{(2E)^2-4(2E)+4}(1)=2^t\frac{1}{4E^2-8E+4}(1)$$

$$=2^t\frac{1}{4(1+\Delta)^2-8(1+\Delta)+4}(1)=2^t\frac{1}{4\Delta^2}(1)=\frac{2^t}{4}\Delta^{-1}[\Delta^{-1}(1)]$$

$$=\frac{2^t}{4}\Delta^{-1}[t^{(1)}]=\frac{2^t}{4}\frac{t^{(2)}}{2}=\frac{t(t-1)2^t}{8}$$

۹-۲-۲- جملات متغیر $\mathrm{Cos}\,a\,t$, $\mathrm{Sin}\,a\,t$

اگر $f(t)$ در معادله (۱۰۵) مساوی $\mathrm{Cos}\,a\,t$, $\mathrm{Sin}\,a\,t$ باشد می‌توان از روش بحث شده در قبل از رابطه (۱۰۹) برای بدست آوردن جواب خاص استفاده نمود. زیرا می‌توان نوشت:

$$\mathrm{Sin}\;a\,t=\frac{e^{ia\,t}-e^{-ia\,t}}{2i},\quad \mathrm{Cos}\;a\,t=\frac{e^{ia\,t}+e^{-ia\,t}}{2} \qquad (۱۱۲)$$

که $i=\sqrt{-1}$ و $e=2.718$ عدد نپر است. مقادیر $\frac{e^{ia\,t}}{2}$ و $\frac{e^{-ia\,t}}{2}$ و $-\frac{e^{-ia\,t}}{2}$ همگی از شکل جمله متغیر cM^t می‌باشند که می‌توان آنها را همانند روش قبل مورد استفاده قرار داد. اگر

$f(t)= Sin(\alpha t)$ باشد جواب خاص به شکل زیر است:

$$y_p=\frac{1}{f(E)}\frac{1}{2i}[e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}]=\frac{1}{f(E)}\frac{1}{2i}[(e^{i\alpha})^t-(e^{-i\alpha})^t]=\frac{1}{f(E)}\frac{1}{2i}[(e^{i\alpha})^t]-\frac{1}{f(E)}\frac{1}{2i}[(e^{-i\alpha})^t]$$

$$=\frac{1}{f(e^{ia})}(\frac{1}{2i})[(e^{i\alpha})^t]-\frac{1}{f(e^{-ia})}\frac{1}{2i}[(e^{-i\alpha})^t]=\frac{1}{2i}\{\frac{e^{ia\ t}}{f(e^{ia})}-\frac{e^{-ia\ t}}{f(e^{-ia})}\} \qquad (۱۱۳)$$

همینطور برای $f(t)= Cos\alpha\ t$ می‌توان جواب خاص زیر را نوشت:

$$y_p=\frac{1}{2}\{\frac{e^{ia\ t}}{f(e^{ia})}+\frac{e^{-ia\ t}}{f(e^{-ia})}\} \qquad (۱۱۴)$$

۹-۲-۳- جملات متغیر $c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K$

اگر $f(t)$ در معادله (۱۰۴) یک پولی‌نومیال از درجه K بر حسب t باشد:

$$f(t)= p(t)= c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K$$

جواب خاص برابر خواهد بود با:

$$y_p=\frac{1}{f(E)}p(t)=\frac{1}{f(1+\Delta)}p(k)=(b_0+b_1\Delta+\ldots+b_K\Delta^K+\ldots)P(t) \qquad (۱۱۵)$$

باید توجه کرد از آنجائیکه $\Delta^{K+1}P(t)=0$ بسط داخل پرانتز سمت راست بعد از Δ^K صفر است.

مثال ۹-۸

جواب خاص معادله تفاضلی $(E^2-6E+8)\ y_t=3t^2+2$ را پیدا کنید.

جواب خاص را طبق (۱۱۵) به این شکل بدست آوریم:

$$y_p=\frac{1}{E^2-6E+8}(3t^2+2)=\frac{1}{(1+\Delta)^2-6(1+\Delta)+8}(3t^2+2)=\frac{1}{3-4\Delta+\Delta^2}(3t^2+2)$$

$$=(\frac{1}{3})\frac{1}{1-(\frac{4}{3}\Delta-\frac{1}{3}\Delta^2)}(3t^2+2)=\frac{1}{3}[1+(\frac{4}{3}\Delta-\frac{1}{3}\Delta^2)+(\frac{4}{3}\Delta-\frac{1}{3}\Delta^2)^2+\ldots](3t^2+2)$$

$$=\frac{1}{3}[1+\frac{4}{3}\Delta+\frac{13}{9}\Delta^2+\ldots](3t^2+2)=\frac{1}{3}[3t^2+2]+\frac{4}{9}\Delta[3t^{(2)}+3t^{(1)}+2]+\frac{13}{27}\Delta^2[3t^{(2)}+3t^{(1)}+2]$$

$$=\frac{1}{3}[3t^2+2]+\frac{4}{9}(6t^{(1)}+3)+\frac{13}{27}[6]=t^2+\frac{8}{3}t+\frac{44}{9}$$

۹-۲-۴- جملات متغیر $cM^t(c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K)$

اگر $f(t)$ در معادله (۱۰۴) یک پولی‌نومیال از درجه K بر حسب t ضرب‌در cM^t باشد:

$$f(t)= cM^tp(t)= M^t(c_0t^K+c_1t^{K-1}+\ldots+c_K)$$

جواب خاص برابرخواهد بود با:

$$y_p = \frac{1}{f(E)} cM^t p(t) = cM^t \frac{1}{f(ME)} P(t) \tag{۱۱۶}$$

حال روش بیان شده در قبل را از رابطه (۱۱۵) بکار می‌بریم: $y_p = cM^t \dfrac{1}{f(M(1+\Delta))} p(t)$

این نتیجه برای هر تابع F(t) بجای p(t) نیز برقرار است.

تمرین ۱۱

۱- معادلات تفاضلی زیر را با استفاده از روش اپراتور حل کنید:

1- $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 4(3)^t - 2(5)^t$
2- $y_{t+2} + 4y_{t+1} + 4y_t = t^2 - 3t + 5$
3- $3y_{t+2} - 8y_{t+1} - 3y_t = 3^t - 2t + 1$
4- $y_{t+2} - 8y_{t+1} + 16y_t = 3(4)^t - 5(-2)^t$
5- $2y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = t^3 - 4t + 5^t$
6- $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = t^2(2)^t$
7- $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t = 2t + 4 - 3^{t-1}$
8- $y_{t+}4 - 16y_t = 3t + 2^t + 3^t$

۲- نشان دهید که:

1- $\dfrac{1}{f(E)} \text{Cos } t\theta = \text{Re}\left\{\dfrac{e^{itq}}{f(e^{iq})}\right\}$
2- $\dfrac{1}{f(E)} \text{Sin } t\theta = \text{IM}\left\{\dfrac{e^{itq}}{f(e^{iq})}\right\}$

Re و IM مشخص کننده قسمت‌های حقیقی و موهومی یک عبارت مختلط می‌باشد.

۳- با استفاده از مسئله ۲ معادله تفاضل $y_{t+2} + 4y_{t+1} - 12y_t = 5\text{Cos}(\pi t/3)$ را حل کنید.

۴- اولاً مقدار $\dfrac{1}{E-a} f(t)$ را تعیین کنید ثانیاً نشان دهید که:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E-4} - \frac{1}{E-2}\right) = \frac{1}{E^2 - 6E + 8}$$

و با استفاده از اولاً و ثانیاً معادله روبرو را حل کنید. $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 8y_t = t^2 + 3^t$

۵- نشان دهید که چگونه با استفاده از روش اپراتور می‌توان معادله زیر را حل نمود:

$$(E-1)^2 (E+2)(E-3)y_t = t^2 - 3t + 5 + 3^t$$

۶- معادله $(E^2+1)^2 y_t = 2t - 3$ را حل کنید:

۷- تمرین ۱۰ از مسئله ۱ شماره‌های ۱ تا ۱۴ را بترتیب شماره با روش اپراتور حل کنید.

۹-۳- روش تغییر پارامترها

معادله تفاضلی (۱۰۴) را مدنظر بگیرید. در این روش اول تابع مکمل را پیدا می‌کنیم. به عبارت دیگر جواب عمومی معادله همگن زیر را بدست می‌آوریم:

$$f(E)\ y_t = 0 \tag{۱۱۸}$$

فرض کنید جواب مربوطه به شکل زیر است

$$y_t = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n \tag{۱۱۹}$$

سپس ثابت‌های دلخواه $c_1, c_2, \ldots, c_n$ را با توابعی از t چون $K_1, K_2, \ldots, K_n$ جایگزین می‌کنیم و سعی بر یافتن آنها به شکلی داریم که

$$y_t = K_1u_1 + K_2 + \ldots + K_nu_n \tag{۱۲۰}$$

معادله (۱۰۴) را برقرار نماید. برای یافتن $K_1, K_2, \ldots, K_n$ احتیاج به n شرط داریم یکی از این شروط می‌تواند (۱۰۴) باشد. باقیمانده ۱–۸ شرط دلخواه است که باید برقرار شود. این شروط معمولاً طوری انتخاب می‌شوند که عبارات $\Delta y_t, \Delta^2 y_t, \ldots$ را تا حد ممکن ساده نمایند. این معادلات به طریق زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&u_1\Delta K_1 + u_2\Delta K_2 + \ldots + u_n\Delta K_n = 0\\
&(\Delta u_1)\,\Delta K_1 + (\Delta u_2)\,\Delta K_2 + \ldots + (\Delta u_n)\,\Delta K_n = 0\\
&\vdots\\
&(\Delta^{n-2}u_1)\,\Delta K_1 + (\Delta^{n-1}u_2)\,\Delta K_2 + \ldots + (\Delta^{n-2}u_n)\,\Delta K_n = 0\\
&(\Delta^{n-1}u_1)\,\Delta K_1 + (\Delta^{n-1}u_2)\,\Delta K_2 + \ldots + (\Delta^{n-1}u_n)\,\Delta K_n = f(t)
\end{aligned}$$

دستگاه معادلات فوق را می‌توان برای $\Delta K_1, \Delta K_2, \ldots, \Delta K_n$ حل نمود و بدین ترتیب $K_1, K_2, \ldots, K_n$ را بدست آورد. با جایگزینی $K_1, K_2, \ldots, K_n$ در (۱۲۰) جواب معادله تفاضلی بدست خواهد آمد. نکته قابل توجه این است که باید دترمینان ضرائب دستگاه معادلات (۱۲۱) غیرصفر باشد. برای توضیح مطلب به قضایای زیر توجه کنید.

قضیه ۱۸ (کازوراتی)

مجموعه توابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ و .. و $f_n(t)$ مستقل خطی هستند اگر فقط اگر دترمینان زیر مخالف صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & \cdots & f_n(0)\\ f_1(1) & f2(1) & \cdots & f_n(1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_1(n-1) & f_2(n-1) & \cdots & f_n(n-1) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{۱۲۲}$$

اثبات: مجموعه n تـابع $f_n(t)$ و .. و $f_2(t)$ و $f_1(t)$ را وابسته خطی مـی‌نـامیم اگـر بتـوانیم n ثابـت $A_1,A_2,\ldots,A_n$ که همگی آنها صفر نباشند را پیدا کنیم بطوریکه:

$$A_1f_1(t)+ A_2f_2(t)+ \ldots+ A_n(t)= 0$$

به عبارت دیگر توابع $f_n(t)$ و .. و $f_2(t)$ و $f_1(t)$ مستقل خطی هستند اگر رابطـه فـوق در صـورت $A_1=A_2=\ldots=A_n=0$ برقرار باشد. با گذاشتن مقدار $t= 0,\ldots,n-1$ دسـتگاه معـادلات همگـن زیـر بدست می‌آید:

$$A_1f_1(0) + A_2f_2(0)+ \ldots+ A_nf_n(0)= 0$$
$$A_1f_1(1) + A_2f_2(1)+ \ldots+ A_nf_n(1)= 0$$
$$\vdots$$
$$A_1f_1(n-1)+ A_2f_2(n-1)+ \ldots+ A_nf_n(n-1)= 0$$

دستگاه معادلات همگن فوق وقتی دارای جواب $A_1=A_2=\ldots=A_n=0$ است که اگر و فقط اگـر شرط (۱۲۲) برقرار باشد.

قضیه۱۹ (اصل و انطباق)

اگر $f_n(t)$ و...و$f_2(t)$ و$f_1(t)$ جواب مستقل خطی معادله (۱۱۸) (از مرتبـهٔ n) باشـند جـواب عمومی یک ترکیب خطی از این n جواب است. به عبارت دیگر

$$y_t= c_1f_1(t)+ c_2f_2(t)+\ldots+ c_nf_n(t) \qquad (۱۲۳)$$

و تمام جواب‌های دیگر حالات خاصی از آن هستند. بعبارت دیگر جواب‌های خاص می‌باشند.

حال برمی‌گردیم به دسـتگاه (۱۲۱). دترمینـان ضـرائب ایـن دسـتگاه مـساوی کـازوراتی دستگاه مزبور می‌باشد (اثبات به عمده خواننده گذشته می‌شود) که در صورتی که $u_1,u_2,\ldots,u_n$ در معادله (۱۲۰) مستقل خطی باشند مخالف صفر است.

مثال ۹-۹

معادله تفاضل $y_{t+2} – 5y_{t+1}+ 6y_t= t^2$ را حل کنید.

تابع مکمل معادله همگن $y_{t+2} – 5y_{t+1}+ 6y_t= 0$ را بدست می‌آوریم که برابر است با $c_12^t+c_23^t$.

فرض می‌کنیم که معادله تفاضلی کامل دارای جواب عمومی زیر است: $y_t=K_12^t+K_23^t$

که K_1 , K_2 توابعی از t هستند که باید تعیین شوند. مقدار زیر را حساب می‌کنیم:

$$Dy_t= K_12^t+ 2^{t+1}DK_1+ (2)\ 3^tK_2+ 3^{t+1}K_2$$

دو شرط برای پیدا کردن K_1 , K_2 لازم داریم. یکی از آنها را جواب عمومی y_t فوق در نظر می‌گیریم. شرط دیگر را که مختار به انتخاب دلخواه آن هستیم صفر بودن دو جمله از رابطه فوق در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر: $2^{t+1}DK_1+3^{t+1}DK_2=0$

پس مجدداً $D\,y_t$ را می‌نویسیم: $Dy_t=2^tK_1+2(3)^tK_2$

با تفاضل گرفتن مجدد از آن: $D^2y_t=2^tK_1+2^{t+1}DK_1+4(3)^tK_2+2(3)^{t+1}DK_2$

معادله تفاضلی صورت مسئله را به این شکل می‌نویسیم: $(E^2-5E+6)y_t=t^2$

به جای E مقدار مساوی آن $D+1$ را قرار می‌دهیم: $(D^2-3D+2)y_t=t^2$

مقادیر y_t و Dy_t و D^2y_t را در معادله فوق قرار می‌دهیم: $2^{(t+1)}DK_1+2(3)^{t+1}DK_2=t^2$

حال باید مقادیر K_1 , K_2 را از دو معادله زیر بدست آوریم:

$$2^{t+1}DK_1+3^{(t+1)}DK_2=0$$
$$2^{t+1}DK_1+2(3)^{(t+1)}DK_2=t^2$$

با حل دستگاه فوق خواهیم داشت: $DK_1=\dfrac{-t^2}{2^t+1}$, $DK_2=\dfrac{t^2}{3^{t+1}}$

مقادیر K_1 , K_2 برابرخواهند بود با: $K_1=-D^{-1}\left(\dfrac{t^2}{2^{t+1}}\right)$ $K_2=-D^{-1}\left(\dfrac{t^2}{3^{t+1}}\right)$

حال مقادیر K_1 و K_2 را می‌توان از دو طریق محاسبه نمود. یکی استفاده از اپراتور å یا D^{-1} است و یکی روش اپراتور با استفاده از رابطه (۱۱۱). در اینجا از روش اپراتور استفاده می‌کنیم.

مقدار K_1 را به شکل زیر بسط می‌دهیم:

$$K_1=-\frac{1}{\Delta}\left(\frac{t^2}{2^{t+1}}\right)=-\frac{1}{E-1}\left(\frac{t^2}{2^{t+1}}\right)=-\frac{1}{E-1}\left(\frac{1}{2}\right)^t\left(\frac{t^2}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{1}{\frac{1}{2}E-1}\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{1}{E-1}(t^2)=\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{1}{1-\Delta}(t)^2$$

با توجه به تابع فاکتوریل $t^2=t(t-1)+t=t^{(2)}+t^{(1)}$ و بسط $\dfrac{1}{1-\Delta}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$K_1=\left(\frac{1}{2}\right)^t(1+D+D^2+\dots)(t^{(2)}+t^{(1)})=\left(\frac{1}{2}\right)^t(t^{(2)}+t^{(1)}+2t^{(1)}+1+2)=\left(\frac{1}{2}\right)^t(t^2+2t+3)$$

همچنین مقدار K_2 را به این شکل بدست می‌آوریم:

$$K_2=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{t^2}{(3)^{t+1}}\right)=\frac{1}{E-1}\left(\frac{t^2}{(3)^{t+1}}\right)=\frac{1}{E-1}\left(\frac{1}{3}\right)^t\left(\frac{t^2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^t\frac{1}{\frac{1}{3}E-1}\left(\frac{t^2}{3}\right)$$

$$= (\frac{1}{3})^t \frac{1}{E-3}(t^t) = (\frac{1}{3})^3 \frac{1}{\Delta-2}(t^2) = -(\frac{1}{3})^t \frac{1}{2-\Delta}(t^2) = -(\frac{1}{3})^3 \frac{1/2}{1-(\frac{\Delta}{2})}(t^2)$$

$$= -(\frac{1}{3})^t \frac{1}{2}[1+(\frac{1}{2}\Delta)+(\frac{1}{2}\Delta)^2+...]t^2 = -\frac{1}{2(3)^t}[1+\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{4}+...]t^2$$

$$= -\frac{1}{2(3)^t}[t^2+\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{1}{4}(2)] = -\frac{1}{2(3)^t}[t^2+t+1]$$

توجه کنید برای محاسبه تفاضل‌های t^2 در K_1 , K_2 به ترتیب از تابع فاکتوریل و عمل تفاضل برای نشان دادن هر دو راه استفاده شده است. حال به مقدار K_1 , K_2 دو مقدار ثابت دلخواه c_2, c_1 را اضافه می‌کنیم. به این ترتیب.

$$K_1 = \frac{1}{2^2}(t^2+2t+3)+c_1 \qquad K_2 = -\frac{1}{2(3)^2}(t^2+t+1)+c_2$$

این مقادیر را در معادله $y_t = K_1(2)^t + K_2(3)^t$ قرار می‌دهیم.

$$y_t = [\frac{1}{2^2}(t^2+2t+3)+c_1)]2^t + [-\frac{1}{2(3)^3}(t^2+t+1)+c_2]3^t$$

یا:

$$y_t = c_1(2)^t + c_2(3)^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{5}{2}$$

مقادیر c_1 , c_2 را می‌توان با استفاده از مقادیر اولیه معین نمود.

تمرین ۱۲

۱- معادلات زیر را با استفاده از روش تغییر پارامترها حل کنید.

1- $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = t^2$

2- $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 3 + t + 4^t$

3- $4y_{t+2} - 4y_{t+1} + y_t = 3/2^t$

4- $y_{t+2} + y_t = 1/t$

5- $5y_{t+2} - 3y_{t+1} - 2y_t = 3t + (-2)^t$

6- $y_{t+2} - y_{t+1} + y_t = 1/t!$

۲- از تمرین ۱۰ مسئله یک شماره‌های ۱ تا ۹ را با روش تغییر پارامترها حل کنید.

۳- از تمرین ۱۱ مسئله یک شماره‌های ۱ تا ۸ را با روش تغییر پارامترها حل کنید.

۴- معادله زیر را با روش تغییر پارامترها حل کنید. $y_{t+3} - 6y_{t+2} + 11y_{t+1} - 6y_t = 5(2)^t + t^2$

۹-۴- روش کاهش مرتبه

اگر بتوانیم معادله تفاضلی (۱۰۴) یا (۱۰۵) را به شکل زیر بنویسیم می‌توان با کاهش مرتبه معادله تفاضلی را حل نمود:

$$(E-r_1)(E-r_2)\ ...\ (E-r_n)y_t = f(t) \qquad (۱۲۴)$$

قرار می‌دهیم:

$$z_t= (E-r_2) \ldots (E-r_n)y_t \tag{۱۲۵}$$

با جایگزین (۱۲۵) در (۱۲۴) خواهیم داشت:

$$(E-r_1)z_t= f(t) \tag{۱۲۶}$$

برای پیدا کردن جواب (۱۲۶) به این شکل عمل می‌کنیم. اول معادله همگن را می‌نویسیم:

$$(E-r_1)z_t= 0 \tag{۱۲۶}$$

یا به عبارت دیگر:

$$z_{t+1}- r_1z_t= 0 \tag{۱۲۷}$$

با جایگزینی پیاپی برای tهای مختلف از صفر تا t خواهیم داشت.

$$z_1= r_1y_0,\ z_2= r_1y_1,\ldots,z_{t-1}= rz_{t-2}\ ,\ z_t= rz_{t-1}$$

بنابراین تابع مکمل به این شکل خواهد بود. $z_t= y_0\, r_1^{\,t}$

مقدار y_0 را مساوی دلخواه ثابت c_0 قرار می‌دهیم: $z_t= c_0\, r_1^{\,t}$

حال c_0 را به عنوان تابع دلخواهی از t چون $K(t)$ تعریف می‌کنیم پس:

$$z_t= K(t)r_1^{\,t} \tag{۱۲۸}$$

حال باید $K(t)$ را طوری تعیین کنیم که معادله تفاضلی کامل برقرار باشد. پس مقدار z_t بدست آمده را در معادله تفاضلی (۱۲۷) قرار می‌دهیم: $K(t+1)\, r_1^{\,t+1} - K(t)r_1^{\,t+1} = f(t)$

طرفین را بر $r_1^{\,t+1}$ تقسیم کرده: $K(t+1)- K(t)=\left(\dfrac{f(t)}{r_1^{\,t+1}}\right) =DK(t)$

بدین ترتیب: $K(t)= D^{-1} \left(\dfrac{f(t)}{r_1^{\,t+1}}\right)$

پس: $K(t)= \displaystyle\sum_{p=1}^{t-1} \frac{f(p)}{r_1^{\,p+1}} + c$

با جایگزینی در (۱۲۸) خواهیم داشت:

$$z_t= r_1^{\,t} \sum_{p=1}^{t-1} \frac{f(p)}{r_1^{\,p+1}} + cr_1^{\,t} = r_1^{\,t}\Delta^{-1}\left(\frac{f(t)}{r_1^{\,t+1}}\right) + cr_1^{\,t} \tag{۱۲۹}$$

که جواب معادله (۱۲۷) می‌باشد. این جواب را از طریق دیگری با ضرب معادله (۱۲۶) در یک عامل جمع مناسب نیز می‌توان بدست آورد. معادله (۱۲۶) را به این شکل می‌نویسیم:

$$z_{t+1} - r_1z_t= f(t)$$

دو طرف را بر r_1^{t+1} تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{z_{t+1}}{r_1^{t+1}}-\frac{z_t}{r_1^{t}}=\frac{f(t)}{r_1^{t+1}}$$

به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\Delta(\frac{z_t}{r_1^{t}})=\frac{f(t)}{r_1^{t+1}}$$

یا:

$$(\frac{z_t}{r^t{}_1})\Delta^{-1}=(\frac{f(t)}{r_1^{t+1}})=\sum_{p=1}^{t-1}\frac{f(p)}{r_1^{p+1}}+c$$

با ضرب طرفین در r_1^t جواب (۱۲۹) مجدداً به دست می‌آید.

حال بر می‌گردیم به حل معادله (۱۲۴) مقدار z_t را برای معادله (۱۲۶) پیدا کردیم که برابر (۱۲۹) می‌باشد. این مقدار را در (۱۲۵) قرار می‌دهیم. دوباره به یک معادله تفاضلی کامل با جملات متغیر روبرو هستیم که دارای مرتبه n-1 می‌باشد. همانند (۱۲۵) و (۱۲۶) یک معادله تفاضلی جدید را تعریف می‌کنیم و آنرا به روش فوق حل می‌کنیم. با ادامه این روش معادله (۱۲۴) را می‌توان حل نمود. به عبارت دیگر با قرار دادن z_t از (۱۲۹) در (۱۲۵) خواهیم داشت:

$$(E-r_2)\,(E-r_3)\,\ldots\,(E-r_n)y_t=r_1^t\sum_{p=1}^{t-1}\frac{f(p)}{r_1^{p+1}}+cr_1^t \qquad (۱۳۰)$$

معادله فوق شبیه به معادله (۱۲۴) است ولی با یک مرتبه کمتر. مجدداً برای متغیر جدیدی چون w_t تعریف می‌کنیم:

$$W_t=(E-r_3)\ldots(E-r_n)\,y_t \qquad (۱۳۱)$$

با جایگزینی (۱۳۱) در (۱۳۰) خواهیم داشت:

$$(E-r_2)\,w_t=r_1^t\sum_{p=1}^{t-1}\frac{f(p)}{r_1^{p+1}}+cr_1^t$$

که عیناً همانند (۱۲۶) حل خواهد شد.

مثال ۹-۱۰

معادله تفاضل $y_{t+2}-5y_{t+1}+6y_t=t^2$ را حل کنید.

معادله فوق را بر حسب اپراتور E می‌نویسیم:

$$(E^2-5E+6)\,y_t=t^2$$

سپس آنرا تجزیه به عوامل می‌کنیم:

$$(E-3)(E-2)y_t=t^2$$

فرض می‌کنیم:

$$z_t=(E-2)y_t$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$(E-3)z_t=t^2$$

z_t را می‌توان از رابطه (۱۲۹) به این شکل نوشت:
$$z_t = (3)^t D^{-1}\left(\frac{t^2}{3^{t+1}}\right) = c_1(3)^t$$

با استفاده از روش بحث شده در قسمت ۱–۲–۸ مقدار $D^{-1}\left(\frac{t^2}{3^{t+1}}\right)$ را محاسبه نموده و در معادله فوق جایگزین می‌کنیم. حاصل برابر است با:
$$z_t = c_1 3^t - \frac{1}{2}\left(t^2 + t + 1\right)$$

پس:
$$(E-2)y_t = c_1 3^t - \frac{1}{2}\left(t^2 + t + 1\right)$$

مجدداً روش فوق از معادله (۱۲۹) را بکار گرفته و y_t را به شکل زیر می‌نویسیم.
$$y_t = 2^t D^{-1}\left[\frac{c_1 3^t - \frac{1}{2}(t^2 + t + 1)}{3^{t+1}}\right] + c_2 2^t$$

با استفاده از قسمت ۱–۲–۸ می‌توان بدست آورد که:
$$y_t = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{5}{2} + c_2 2^t + c_3 3^t$$

<u>تمرین ۱۳</u>

تمرین ۱۱ شماره‌های ۴ و ۵ و ۶ را با استفاده از روش کاهش مرتبه حل کنید.

۱۰- معادلات تفاضلی خطی با ضرائب متغیر

تابحال معادلات تفاضلی خطی را در نظر گرفتیم که ضرائب آنها اعداد ثابت بودند. در مورد اینگونه معادلات جواب عمومی برابر بود با مجموع تابع مکمل و جواب خاص. به عبارت دیگر نشان دادیم که:

$$y_t = y_c + y_p \qquad (۱۳۳)$$

اگر در معادله تفاضلی خطی مورد نظر همانند معادله (۸۲) ضرائب $a_1,\dots,a_n$ خود توابعی از t باشند، به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$y_t = a_1(t)y_{t+1} + a_2(t)y_{t+2} + \dots + a_n(t)y_{t+n} + f(t) \qquad (۱۳۴)$$

رابطه (۱۳۳) عیناً برای معادله (۱۳۴) صادق خواهد بود و همانند قبل می‌توان از آن برای حل چنین معادلاتی استفاده کرد.

۱۰-۱- معادله تفاضلی خطی مرتبه اول با ضریب متغیر

هر معادله تفاضلی خطی مرتبه اول با ضریب متغیر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y_{t+1} - a(t)y_t = f(t) \qquad (۱۳۵)$$

و همیشه می‌توان جواب آنرا بدست آورد. برای خصول تابع مکمل بترتیب زیر عمل می کنیم:

$$y_{t+1} = a(t)y_t$$
$$y_1 = a(0)y_0$$
$$y_2 = a(1)\,y_1 = a(0)\,a(1)y_0$$
$$y_3 = a(2)\,y_2 = a(0)\,a(1)\,a(2)y_0$$
::
$$y_t = a(t-1)\,y_{t-1} = a(0)\,a(1)\dots a(t-1)y_0 \qquad (۱۳۶)$$

اگر $f(t)=0$ باشد جواب معادله (۱۳۵) برابر معادلهٔ (۱۳۶) خواهد بود. در حالات کلی $f(t)$ دو طرف معادله (۱۳۵) را در «عامل جمع» $\frac{1}{a(1)a(2)\dots a(t)}$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{y_{t+1}}{a(1)a(2)\dots - a(t)} - \frac{y_t}{a(1)a(2)\dots a(t-1)} = \frac{f(t)}{a(1)a(2)\dots a(t)}$$

واضح است که سمت چپ معادلهٔ فوق یک تفاضل است به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\Delta\frac{y_t}{a(1)a(2)...a(t-1)}=\frac{f(t)}{a(1)a(2)...a(t)}$$

به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$[\frac{y_t}{a(1)a(2)...a(t)}]=\Delta^{-1}[\frac{f(t)}{a(1)a(2)...a(t)}]$$

اپراتور D^{-1} همانند تابع اولیه یا انتگرال در حالت پیوسته عمل می‌نماید که قبلاً در بخش اپراتورها به آن اشاره شد و روش بدست آوردن آن مورد بحث قرار گرفت. سمت راست معادله فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت که c عدد دلخواه ثابت می‌باشد.

$$\Delta^{-1}[\frac{f(t)}{a(1)a(2)...a(t)}]=\sum_{p=1}^{t-1}\frac{f(p)}{a(1)a(2)...a(p)}+c$$

درستی رابطه فوق با D گرفتن از دو طرف معلوم است. پس خواهیم داشت:

$$[\frac{y_t}{a(1)a(2)...a(t-1)}]=\sum_{p=1}^{t-1}[\frac{f(p)}{a(1)a(2)...a(t)}]+c$$

یا به عبارت دیگر:

$$y_t= a(1)a(2)\dots a(t-1)\ \Delta^{-1}\left[\frac{f(p)}{a(1)a(2)...a(p)}\right] \qquad (۱۳۷)$$

$$y_t= a(1)a(2)\dots a(t-1)\sum_{p=1}^{t-1}\frac{f(p)}{a(1)a(2)...a(p)}+ c\ a(1)\ a(2)\dots a(t-1) \qquad (۱۳۸)$$

مثال ۱۰-۱

معادله تفاضلی $y_t- ty_{t-1}= t!$ را با جواب اولیه $y_0= 1$ حل کنید. (علامت ! فاکتوریل می‌باشد).

با استفاده از (۱۳۷) می‌توان نوشت:

$$y_{t-1}= (1)(2)(3)\dots(t-1)D^{-1}\ [\frac{t!}{(1)(2)(3)...(t)}]= (t-1)!\ D^{-1}\ [\frac{t!}{t!}]+ c(t-1)!=$$

$$(t-1)!\ D^{-1}[1]+ c(t-1)! = (t-1)!\ t+ c(t-1)! = t! + c(t-1)!$$

حال شرط اولیه $y_1= 1$ را بکار می‌بریم: $y_0= 1= 1!+ c(0!)= 1+c$

پس $c=0$ را در جواب عمومی قرار می‌دهیم. می‌شود: $y_{t-1}= t!$

۱۰-۲- معادلات تفاضلی خطی با مرتبه بیش از یک و ضرائب متغیر

معادلات تفاضلی مراتب بالاتر با ضرائب متغیر همیشه بطور دقیق قابل حل نیستند. به این علت راه حل‌های خاص را باید برای آنان جستجو نمود. چهار روش زیر از معمول‌ترین روش‌ها

برای حل اینگونه معادلات می‌باشد. روش‌های مزبور اساساً همان روش‌هائی است که در فصل نهم مورد استفاده واقع شدند. حال به توضیح روش‌های معمول در قالب چند مثال می‌پردازیم.

۱۰-۲-۱- فاکتورگیری از اپراتور

در این روش سعی بر این است که معادله تفاضلی را به صورت حاصل‌ضرب عوامل و برحسب اپراتور E بنویسیم. به عبارت دیگر بتوانیم معادله تفاضلی را به شکل زیر تبدیل کنیم.

$$(E-a(t))(E-b(t))\dots(E-u(t))=f(t) \qquad (۱۳۷)$$

با پیدا کردن $a(t), b(t), \dots, u(t)$ و سپس استفاده روش کاهش مرتبه می‌توان معادله مورد نظر را حل نمود.

مثال ۱۰-۲

اولاً معادله تفاضلی زیر را به صورت (۱۳۷) بنویسید و جواب آن را با شرط $y_1=0, y_2=1$ بدست آورید:

$$y_{t+2}-(t+2)\,y_{t+1}+ty_t=t$$

معادله فوق را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$[E^2-(t+2)E+t]\,y_t=t$$

$b(t)$ و $a(t)$ را چنان پیدا می‌کنیم که معادله فوق به شکل زیر باشد:

$$[E-a(t)][E-b(t)]y_t=t$$

در سمت چپ معادله فوق کروشه دوم را در y_t سمت راست آن ضرب می‌کنیم و حاصل را در کروشه اول ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}[E-a(t)]\,[y_{t+1}-b(t)y_t] &= y_{t+2}-b(t+1)\,y_{t+1}-a(t)\,(y_{t+1}-b(t)y_t)\\ &= y_{t+2}-[a(t)+b(t+1)]\,y_{t+1}+a(t)\,b(t)\,y_t\end{aligned} \qquad (۱۳۸)$$

مقدار فوق را با معادله تفاضلی صورت مسئله مقایسه می‌کنیم. می‌توان نتیجه گرفت.

$$\begin{cases} a(t)+b(t+1)=t+2\\ a(t)b(t)=t\end{cases}$$

این دستگاه را برای $a(t)$, $b(t)$ حل می‌کنیم. از معادله دوم آن می‌توان نتیجه گرفت که $a(t)=t$ و $b(t)=1$ و یا $a(t)=1$, $b(t)=t$ می‌توانند جواب باشند. از آنجا که مجموعه دوم $a(t)=1, b(t)=t$ دستگاه فوق را برقرار می‌نماید معادله تفاضلی ما می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$(E-1)\,(E-t)\,y_t=t$$

حال با استفاده از روش کاهش مرتبه معادله فوق را حل می‌کنیم. قرار می‌دهیم: $z_t=(E-t)y_t$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$(E-1)\,z_2=t$$

یا:

$$Dz_t=t$$

پس: $z_t= D^{-1}t = D^{-1}t^{(1)}= \frac{t^{(2)}}{2} + c_1= \frac{1}{2} t\,(t-1)+ c_1$

پس می‌توان نوشت: $z_t= (E-t)\, y_t= \frac{1}{2} t\,(t-1)+ c_1$

یا به عبارت دیگر: $y_{t+1}- ty_t= \frac{1}{2} t\,(t-1)+ c_1$

این معادله همانند معادله (۱۳۵) است و جواب آنرا همانند (۱۳۸) می‌توان نوشت:

$$y_t= (1)(2)(3) \dots (t-1)\, D^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2}t(t-1)+c_1}{(1)(2)(3)\dots(t)}\right]= (t-1)!\, D^{-1} \left(\frac{\frac{1}{2}t(t-1)+c_1}{t!}\right)$$

و یا به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$y_t=\frac{(t-1)!}{2}\sum_{p=1}^{t-1}\frac{p(p-1)}{p!}+c_1(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p!}+c_2(t-1)!$$

مقادیر اولیه $y_1= 0$ و $y_2= 1$ را در معادله فوق قرار می‌دهیم.

$t=1 \implies y_3- 3y_2+ y_1= 1 \implies y_3= 4$

$t=2 \implies c_1+ c_2= 1$

$t=3 \implies 1+ 3c_1+ 2c_2= 4$

پس $c_1= 0$, $c_2= 0$ و جواب برابر خواهد بود با: $y_t=\frac{(t-1)!}{2}\sum_{p=1}^{t-1}\frac{p(p-1)}{p!}+(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p!}$

برای $t>3$ جواب را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y_t=\frac{(t-1)!}{2}[1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(t-3)!}]+(t-1)![1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(4-1)}]$$

مثال ۱۰-۳

معادله تفاضلی همگن $y_{t+2}- (2t+1)\, y_{t+1}+ t^2y_t= 0$ را حل کنید.

معادله فوق را بر حسب اپراتور E به شکل زیر می‌نویسیم: $(E^2- (2t+1)\, E+ t^2)\, y_t= 0$

حال $a(t)$, $b(t)$ را چنان پیدا می‌کنیم که: $[E-a(t)][E-b(t)]\, y_t= 0$

با استفاده از (۱۳۸) باید داشته باشیم: $a(t)+b(t+1)= 2t+1, \quad a(t)b(t)= t^2$

$a(t)=b(t)=t$ می‌تواند جواب این دستگاه باشد پس معادله تفاضلی ما تبدیل می‌شود به:

$(E-t)(E-t)y_t= 0$

فرض می‌کنیم: $z_t=(E-t)y_t$

پس: $(E-t)z_t = 0 \quad ==> \quad z_{t+1} - tz_t = 0$

این معادله همانند (۱۳۵) می‌باشد و z_t از (۱۳۷) بدست می‌آید:

$$z_t = (1)(2)(3)\ldots(t-1)D^{-1}\left[\frac{0}{(1)(2)(3)\ldots(t)}\right] \quad ==> \quad z_t = (t-1)!c_1$$

حال مجدداً داریم: $(E-t)y_t = c_1(t-1)!$

و همانند فوق خواهیم داشت: $y_t = (t-1)!\, D^{-1}\left[\frac{c_1(t-1)!}{t!}\right]$

به عبارت دیگر جواب برابر است با: $y_t = (t-1)!\, D^{-1}\left[\frac{c_1}{t}\right] = c_1(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p} + c_2(t-1)!$

۱۰-۲-۲- روش تغییر پارامترها

روش تغییر پارامترها همانطور که در فصل ۹ به آن اشاره شد در صورتی در اینجا قابل استفاده است که جواب مکمل را داشته باشیم. با داشتن جواب مکمل سپس می‌توان جواب عمومی را بدست آورد.

مثال ۱۰-۴

معادله تفاضلی $y_{t+2} - (2t+1)y_{t+1} + t^2y_t = 2^t$ را حل کنید.

برای حل این معادله با استفاده از روش تغییر پارامترها احتیاج به تابع مکمل معادله فوق داریم. به عبارت دیگر جواب عمومی برای معادله همگن این معادله را باید داشته باشیم. در مثال ۱۰-۳ تابع مکمل را بدست آوریم: $y_p = c_1(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p} + c_2(t+1)!$

حال مقادیر c_1, c_2 را با K_1, K_2 که توابعی از t هستند جایگزین می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$y_t = K_1(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p} + K_2\,(t-1)! \qquad (*)$$

دو معادله برای بدست آوردن K_1 , K_2 لازم داریم یکی از آنها معادله تفاضلی بالاست که برحسب K_1 , K_2 نوشته شده است. شرط دیگری نیز لازم داریم. تفاضل اول را محاسبه کنیم:

$$Dy_t = K_1D\left[(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}\right] + (DK_1)\left[(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}\right] + (DK_1)D\left[(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}\right]$$
$$+K_2D(t-1)! + (DK_2)(t-1)! + (DK_2)D(t-1)!$$

$$=K_1D[(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}]+(DK_1)[(1+D)[(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p})]+K_2D(t-1)!+(DK_2)[(1+D)(t-1)!]$$

شرط یا معادله دوم را اینگونه فرض می‌کنیم که:

$$(DK_1)\ [(1+D)\ \{(t-1)!\ \sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p})\}]+(DK_2)\ [(1+D)\ (t-1)!]=0 \qquad (**)$$

پس Δy_t برابر خواهد بود با:

$$Dy_t=K_1D\ [(t-1)!\ \sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}]+K_2D\ (t-1)!$$

از این رابطه $\Delta^2 y_t$ را حساب می‌کنیم.

$$D^2y_t=(DK_1)\ D[(t-1)!\ \sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}]+K_1D^2\ [(t-1)!\ \sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}]+(DK_1)\ D^2\ [(t-1)!\ \sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}]$$
$$+(DK_2)\ D(t-1)!+K_2D^2(t-1)!+(DK_2)\ D^2\ (t-1)! \quad ==>$$

$$D^2y_t=(DK_1)[D(1+D)(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}]+(DK_2)\{D(1+D)(t-1)!\}+K_1D^2[(t-1)!\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}]+K_2D^2\ (t-1)!$$

حال معادل تفاضلی را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(E^2-(2t+1)\ E+t^2)\ y_t=2^t$$

$E=1+\Delta$ را جایگزین می‌کنیم:

$$[D^2+(1-2t)\ D+t^2-2t]\ y_t=2^t$$

یا:

$$D^2y_t+(1-2t)\ Dy_t+(t^2-2t)\ y_t=2^t$$

مقادیر D^2y_t , Dy_t , y_t را در رابطه فوق جایگزین می‌کنیم. پس از ساده کردن ضرائب جملات K_1 , K_2 صفر می‌شوند نتیجه برابر است با:

$$(DK_1)\ [D(1+D)(t-1)!\ \sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p}]+(DK_2)\ [D(1+D)(t-1)!]=2^t \qquad (**)$$

این معادله را همراه با شرط قبلی برای DK_1 , DK_2 حل می‌کنیم. به عبارت دیگر پس از ساده کردن دو رابطه مشخص شده با (**) داریم:

$$(DK_1)\ [Dt!\sum_{p=1}^{t}\frac{1}{p}]+DK_2\ [Dt!]=2^t \quad , \quad (DK_1)\ [\sum_{p=1}^{t}\frac{1}{p}]+DK_2=0$$

و یا:

$$DK_1=\frac{2^t}{t!} \quad , \quad DK_2=-\frac{2^t}{t!}\sum_{p=1}^{t}\frac{1}{p}$$

بدین ترتیب $K2$, $K1$ برابر خواهند بود با:

$$K_1 = \Delta^{-1}\left(\frac{2^t}{t!}\right) = \sum_{p=1}^{t-1}\frac{2^p}{p!} + d_1\,, \qquad K_2 = \Delta^{-1}\left(\frac{-2^t}{t!}\sum_{p=1}^{t}\frac{1}{p}\right) = -\sum_{s=1}^{t-1}\frac{2^s}{s!}\sum_{p=1}^{s}\frac{1}{p} + d_2$$

مقادیر K_2 , K_1 را در (⁕) قرار می‌دهیم.

$$y_t = (t-1)!\left[\sum_{p=1}^{t-1}\frac{2^p}{p!} + d_1\right]\sum_{p=1}^{t-1}\frac{1}{p} - (t-1)!\left[\sum_{s=1}^{t-1}\frac{2^s}{s!}\sum_{p=1}^{s}\frac{1}{p} - d_2\right]$$

با جابجائی جملات و تغییر اندیس‌ها مقدار y_t برابر زیر خواهد شد که جواب عمومی مسئله ما می‌باشد:

$$y_t = (t-1)!\sum_{s=1}^{t-1}\left[\frac{1}{s}\sum_{p=1}^{s-1}\frac{2^p}{p!} + \frac{d^1}{s}\right] + d_2(t-1)!$$

۱۰-۲-۳- راه حل سری‌ها

در این حالت یک جواب به شکل سری فاکتوریل زیر فرض می‌کنیم و از آن در جهت حل معادله تفاضلی مورد نظر استفاده می‌نمائیم:

$$y_t = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p t^{(p)} \quad , \quad c_p = 0 \quad \text{اگر} \quad p<0 \qquad (۱۳۹)$$

برای روشن‌تر شدن موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۰-۵

معادله تفاضلی $(t+1)y_{t+2} - (3t+2)\,y_{t+1} + 2(t-1)\,y_t = 0$ را حل نمائید.

معادله تفاضلی فوق را به این شکل می‌نویسیم: $(t+1)D^2y_t - KDy_t - 2y_t = 0$

حال یک جواب مانند این را فرض می‌کنیم:

$$y_t = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p t^{(p)} \qquad (⁕)$$

که در آن وقتی $p<0$ است $c_p = 0$ می‌باشد. حال از عبارت فوق تفاضل‌های مرتبه اول و دوم را بدست می‌آوریم:

$$\Delta y_t = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p c_p t^{(p-1)} \quad , \quad \Delta y_t = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p(p-1) c_p t^{(p-2)}$$

مقادیر D^2y_t , Dy_t , y_t را در معادله تفاضلی که با اپراتور D نوشته شده است قرار می‌دهیم:

$$\sum p(p-1)c_p tt^{(p-2)} + \sum p(p-1)c_p t^{(p-2)} - \sum pc_p tt^{(p-1)} - \sum 2c_p t^{(p)} = 0$$

که حدود علائم å همان $p=+\infty$, $p=-\infty$ می‌باشد. با استفاده از تعریف تابع فاکتوریل می‌توانیم عبارت زیر را بنویسیم: $tt^{(M)} = t^{(M+1)} + Mt^{(M)}$

این رابطه را در معادله تفاضلی تبدیل شده فوق می‌توان نوشت:

$$\sum p(p-1)c_p[t^{(p-1)}+(p-2)t^{(p-2)}]+\sum p(p-1)c_p t^{(p-2)}-\sum pc_p[t^{(p)}+(p-1)t^{(p-1)}]-\sum 2c_p t^{(p)}=0$$

در رابطه فوق از å فاکتور گرفته و با توجه به اینکه:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} p(p-1)^2 c_p t^{(p-2)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}(p+2)(p+1)^2 c_{p+2} + t^{(p)}$$

رابطه بالا را بر حسب $t^{(p)}$ به شکل زیر مرتب می‌کنیم:

$$\sum[(p+2)(p+1)^2 c_{p+2} - (p+2)c_p]t^{(p)} = 0$$

از آنجائیکه این رابطه یک اتحاد می‌باشد پس باید کلیه ضرائب آن مساوی صفر باشد.

$(p+2)(p+1)^2 c_{p+2}-(p+2)c_p=0 \quad ==> \quad (p+2)[(p+1)^2 c_{p+2}-c_p]=0$

چون فرض کردیم وقتی $p<0$ است $c_p=0$ می‌باشد پس جواب $p=-2$ قابل قبول نیست و $p+2 \neq 0$ است. بنابراین عبارت زیر باید مساوی صفر باشد: $(p+1)^2 c_{p+2}-c_p=0$

مقادیر $p=0,1,2,3,\ldots$ را در این عبارت قرار می‌دهیم:

$(1)^2c_2-c_0=0\,,\quad (2)^2c_3-c_1=0\,,\quad (3)^2c_4-c_2=0\,,\quad 4^2c_5-c_3=0\,,\quad \ldots$

پس: $c_2=\frac{c_0}{(1)^2}\,,\quad c_3=\frac{c_1}{(2)^2}\,,\quad c_4=\frac{c_2}{(3)^2}=\frac{c_0}{1^2.3^2}\,,\quad c_5=\frac{c_3}{(4)^2}=\frac{c_1}{2^2.4^2}\,,\quad \ldots$

عبارات فوق را در جواب فرض شده برای y_t که با (*) مشخص شده است قرار می‌دهیم:

$$y_t=c_0\left[1+\frac{t^{(2)}}{1^2}+\frac{t^4}{1^2.3^2}+\frac{t^{(6)}}{1^2.3^2.5^2}+\ldots\right]+\left[t^{(1)}+\frac{t^{(3)}}{2^2.4^2}+\frac{t^{(5)}}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\right]$$

که جواب مسئله است.

۱۰-۲-۴- استفاده از تابع مولد

برای تسهیل حل معادلات تفاضلی مشکل گاهی مناسب است که معادله تفاضلی را به یک معادله دیفرانسیل تبدیل کنیم. این تبدیل بوسیله تابع مولد (۷۴) می‌تواند انجام شود. در این کتاب سعی ما بر این است که به مباحث معادلات یفرانسیل وارد نشویم. علاقه‌مندان برای مشاهده چگونگی استفاده از تابع مولد در تبدیل معادلات تفاضلی به معادلات دیفرانسیل می‌توانند به Bender, Orszag (۱۹۷۸) مراجعه نمایند.

تمرین ۱۴

۱- معادلات تفاضلی زیر را حل کنید.

1- $y_{t+1} - ty_t = t$ $\quad y_1 = 0$ 2- $ty_{t+1} + 2y_t = 1$

3- $y_{t+1} + ty_t = t^{(2)}$ 4- $y_{t+1} + 4ty_t = t!$ $\quad y_1 = 1$

5- $ty_{t+1} - y_t = 2^t$ $\quad y_1 = 0$ 6- $y_{t+2} - (t+1)y_{t+1} + ty_t = t$ $\quad y_1 = 0,\ y_2 = 1$

7- $y_{t+2} - (2t+1)y_{t+1} + t^2 y_t = 0$ 8- $(t+3)y_{t+2} - 3(t+2)y_{t+1} + (2t+1)$ $\quad y_t = 0$

9- $(t-1)\, y_{t+2} - 2ty_{t+1} + \dfrac{3}{4}(t+1)\, y_t = 0$

۲- اگر $z_t \neq 0$ یک جواب معادله تفاضلی $y_{t+2}+a_t y_{t+1}+ b_t y_t= 0$ باشد. اولاً نشان دهید که این معادله تفاضلی خطی مرتبه دوم می‌تواند به یک معادله تفاضلی خطی مرتبه اول با جایگزینی $y_t=z_t u_t$ تبدیل شود. ثانیاً نشان دهید که $y_t=z_t u_t$ معادله تفاضلی $y_{t+2}+a_t y_{t+1}+ b_t y_t= f(t)$ را نیز می‌تواند حل کند.

۳- با استفاده از مسئله۲ معادلات زیر را حل کنید:

1- $ty_{t+2} + (1-t)y_{t+1} - 2y_t = 0$ (راهنمائی: $y_t=t$ یک جواب است)

2- $ty_{t+2} + (1-t)\, y_{t+1} - 2y_t = 1$

۴- ارتباط روش مسئله ۲ را با روش تغییر پارامترها مورد بحث قراردهید.

۵- معادله تفاضلی $a_{t+2}y_{t+2}-(da_{t+1}+b_{t+1})y_{t+1}+db_t y_t= 0$ را حل کنید، d مقدار ثابت است.

۱۱- معادلات تفاضلی غیرخطی

تابحال معادلات تفاضلی را بررسی کردیم که خطی بودند گرچه ضرائب یا جملات غیرخطی هم داشتند. حال معادلاتی را در نظر می‌گیریم که مقدار متغیر در یک زمان تابعی غیرخطی از مقدار آن متغیر در زمان‌های دیگر باشد. ابتدا با ذکر چند مثال روش حل بعضی از اینگونه معادلات را بررسی می‌نمائیم. بطورکلی اینگونه معادلات را به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$y_t = f(y_{t+1}, y_{t+2}, \dots y_{t+n}) \qquad (۱۴۰)$$

۱۱-۱- حل معادلات تفاضلی غیرخطی

در فصول قبل روش‌های حل معادلات تفاضلی خطی را در حالات مختلف بررسی نمودیم. حال شرایطی را در نظر می‌گیریم که معادله تفاضلی ما خطی نباشد. مسلم است که حل اینگونه معادلات مشکل‌تر از معادلات خطی می‌باشد و یافتن فرم بسته جواب همیشه و بسادگی قابل حصول نیست و اغلب باید بررسی مسائل خاص راه‌های خاصی را بررسی نمود. در این فصل به چند روش که اغلب می‌توانند مورد استفاده واقع شوند اکتفا می‌کنیم.

۱۱-۱-۱- استفاده از تبدیل‌ها

در این روش با استفاده از تبدیل‌های ریاضی می‌توان بعضی از معادلات تفاضلی غیرخطی را تبدیل به معادله تفاضلی خطی نمود و سپس آنرا حل کرد.

مثال ۱۱-۱

معادله تفاضلی $y_{t+1} = y^2_t$ را حل نمائید.

از دو طرف معادله فوق لگاریتم می‌گیریم: $Lny_{t+1} = 2\, Lny_t$

این معادله یک معادله تفاضلی خطی مرتبه اول همگن برحسب Lny_t می‌باشد. جواب آن برابر است با: $Lny_t = 2^t\, Lny_0$

پس: $y_t = y_0^{2^t}$

مثال ۱۱-۲

معادله تفاضلی $y_{t+2} = y^2{}_{t+1}/y_t$ را حل کنید.

از دو طرف لگاریتم می‌گیریم و جملات را به سمت چپ می‌بریم: $Lny_{t+2} - 2Lny_{t+1} + Lny_t = 0$

این معادله یک معادله تفاضلی خطی همگن از مرتبه دوم برحسب Lny_t می‌باشد که براحتی می‌توان جواب آنرا بدست آورد. به عبارت دیگر همانطور که در بخش معادلات تفاضلی همگن گفته شد عمل می‌کنیم: جواب آزمایشی زیر را در معادله می‌گذاریم.

$\ln y_t = r^t$, $\ln y_{t+1} = r^{t+1}$, $\ln y_{t+2} = r^{t+2}$

در معادله تفاضلی خطی جایگزین می‌کنیم و پولی‌نومیال کرکتریستیک آنرا بدست می‌آوریم:

$r^t (r^2 - 2r+1)=0$

ریشه‌ها مضاعف بوده و برابر با $r'=r''=1$ هستند. پس جواب مستقل خطی دیگری لازم داریم.

طبق قضایای ۵ و۶ از معادله (۶۷) می‌توان نوشت: $\ln y_t = b1^t + ct1^t \implies \ln y_t = b + ct$

که c,b دلخواه هستند. پس جواب برابر خواهد بود با: $y_t = e^{b+ct}$

۱۱-۱-۲- روش جایگزینی

در این روش ابتدا متغیر y_t را برحسب تابعی از یک متغیر جدید تعریف می‌کنیم و سپس آنرا در معادله تفاضلی جایگزین نموده تا بتوان آنرا به یک معادله قابل حل تبدیل نمود.

مثال ۱۱-۳

معادله تفاضل $y_{t+1} = 2y_t (1-y_t)$ را حل کنید.

برای حل معادله فوق فرض می‌کنیم که:

$$y_t = \frac{1-x_t}{2} \qquad (*)$$

پس:

$$y_{t+1} = \frac{1-x_{t+1}}{2}$$

مقادیر فوق را در معادله صورت مسئله جایگزین می‌نمائیم. حاصل برابر است با: $x_{t+1}=x^2t$

این معادله را در مثال ۱۱-۱ حل کردیم پس: $x_t = x_0^{2^t}$

مقدار x_0 را از معادله (*) محاسبه می‌کنیم: $x_0 = 1-2y_0$

پس x_t برابر خواهد بود با: $x_t = (1-2y_0)^{2^t}$

مقدار x_t را در (*) جایگزین می‌کنیم: $y_t = \frac{1}{2}[1-(1-2y_0)^{2^t}]$

که جواب معادله مورد نظر می‌باشد.

مثال ۱۱-۴

معادله تفاضلی $y_{t+1}y_t - f(t)(y_{t+1} - y_t) + 1 = 0$ را حل کنید.

برای حل معادله فوق تعریف می‌کنیم: $y_t = tg(x_t)$

در معادله فوق جایگزین می‌کنیم: $tg\, x_{t+1}\, tg\, x_t - f(t)\,(tg\, x_{t+1} - tg\, x_t) + 1 = 0$

یا به عبارت دیگر: $\dfrac{tgx_{t+1}tgx_t + 1}{tgx_{t+1} - tgx_t} = f(t)$

با استفاده از فرمول: $tg(a-b) = \dfrac{tga - tgb}{1 + tga.tgb}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{tg(x_{t+1} - x_t)} = f(t) \quad ==> \quad tg(x_{t+1} - x_t) = \frac{1}{f(t)}$$

و همچنین: $x_{t+1} - x_t = \text{arc tg}\dfrac{1}{f(t)} = \text{arc cotg } f(t)$

این معادله همانند (۱۲۶) است که جواب آن در (۱۲۹) آمده است. بنابراین:

$$x_t = \sum_{p=1}^{t-1} arc \text{ cotg } f(p) + c$$

بدین ترتیب جواب معادله تفاضلی مورد نظر برابر است با: $y_t = tg[\sum_{p=1}^{t-1} arc \text{ cotg } f(p) + c]$

۱۱-۱-۳- استفاده از روابط تابعی

گاهی اوقات می‌توان یک معادله تفاضلی غیرخطی را شبیه به یک رابطه تابعی نموده و سپس با جایگزین کردن متغیرهای آن و استفاده از رابطهٔ تابعی مزبور معادله تفاضلی را حل نمود. برای توضیح این روش به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱۱-۵

معادله تفاضلی $y_{t+1} = 4y_t^3 - 3y_t$ را با شرط $|y_0| \leq 1$ حل کنید.

این معادله شباهت زیادی به فرمول روبرو دارد: $\text{Cos } 3A = 4\text{Cos}^3 A - 3\text{Cos } A$

حال فرض می‌کنیم: $y_t = \text{Cos } \theta_t$

و همچنین می‌توان نوشت: $y_{t+1} = \text{Cos } \theta_{t+1}$

با استفاده از سه رابطه فوق در معادله تفاضلی صورت مسئله می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{Cos } \theta_{t+1} = 4\text{Cos}^3\theta_t - 3\text{Cos}\theta_t = \text{Cos } (3\theta t)$$

پس معادله ما تبدیل می‌شود به: $\text{Cos } \theta_{t+1} = \text{Cos } (3\theta t)$

از دو طرف این رابطه arc می‌گیریم: $\theta_{t+1} = 3\theta_t$

این معادله تفاضلی را به راحتی می‌توان به شکل زیر حل نمود: $\theta_t= \theta_0(3)^t$

مقدار θ_0 برابر است با: $\theta_0= \text{arc Cos } y_0$

جواب معادله تفاضلی ما از این قرار خواهد بود: $y_t= \text{Cos }[3^t \text{ arc Cos } y_0]$

مثال ۱۱-۶

معادله تفاضلی $y_{t+1}= 2y^2_t - 1$ را حل کنید.

معادله فوق را می‌توان شبیه به معادلات زیر قرار داد:

$$\text{Cos } 2A= 2\text{Cos}^2A-1$$
$$\text{Cosh } 2A= 2\text{Cosh}^2A-1$$

اگر $|y_0|\leq 1$ باشد رابطه اول و اگر $|y_0|\geq 1$ باشد رابطه دوم را برای حل معادله تفاضلی فوق بکار خواهیم بست. پس برای هر دو حالت می‌توانیم فرض کنیم:

$y_t= \text{Cos } q_t$ اگر $|y_0|\leq 1$

$y_t= \text{Cosh } q_t$ اگر $|y_0|\geq 1$

در هر دو حالت مقادیر فوق را در معادله تفاضلی جایگزین نموده و با استفاده از روابط مثلثاتی فوق آنها را به شکل زیر تبدیل می‌کنیم.

$$\text{Cos } q_{t+1} = 2\text{Cos}^2q_t -1 = \text{Cos } 2q_t$$
$$\text{Cosh } q_{t+1}= 2 \text{ Cosh}^2q_t-1 = \text{Cosh } 2q_t$$

به عبارت دیگر برای دو حالت فوق می‌توانیم بنویسیم: $q_{t+1}= 2q_t$

پس: $q_t= 2^tq_0$

مقدار q_0 برابر است با:

$q_0= \text{arc Cos } y_0$ اگر $|y_0|\leq 1$

$q_0= \text{arc Cosh } y_0$ اگر $|y_0|\geq 1$

به هر حال جواب معادله تفاضلی در دو حالت مختلف برابر خواهد بود با:

$y_t= \text{Cos }[2^t \text{ arc Cos } y_0]$ اگر $|y_0|\leq 1$

$y_t= \text{Cosh }[2^t \text{ arc Cosh } y_0]$ اگر $|y_0|\geq 1$

۱۱-۲- ثبات پویای تعادل در معادلات تفاضلی غیرخطی مرتبه اول

چون یافتن جواب معادلات تفاضلی غیرخطی همیشه قابل حصول نیست برای بررسی

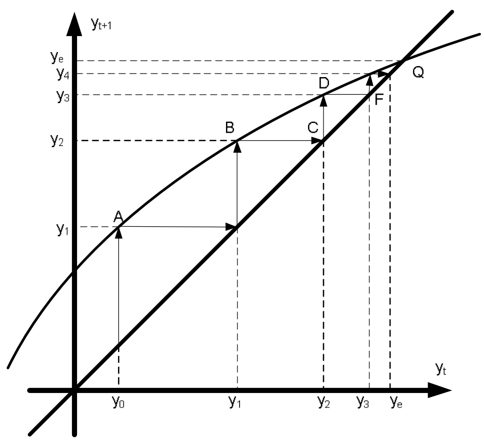
روند زمانی آنها باید روش‌های خاص را استفاده نمود. در حالتی که معادله تفاضلی ما غیرخطی و از مرتبه اول باشد از روش نموداری می‌توان روند زمانی آنرا بررسی نمود. در حالتی که مرتبه تفاضل بیش از یک باشد امکان استفاده از این روش نیست و باید به راه‌های جبری توسل جست در این باب کتاب (۱۹۷۸) Bender , Orszag برای مطالعه توصیه می‌شود و در اینجا از آن بحثی نخواهیم کرد. معادله تفاضلی مرتبه اول خطی را بطورکلی به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$y_{t+1}= f(y_t) \qquad (۱۴۱)$$

که f بیانگر یک تابع از y_t می‌باشد که در حوزه تعریف آن مقدار y_t را به y_{t+1} می‌برد و تابع f تابعی از زمان نیست.

۱۱-۲-۱- بیان گرافیکی روند زمانی y_t

روند زمانی y_t را در معادله تفاضلی غیرخطی مرتبه اول می‌توان با استفاده از یک گراف ساده بررسی نمود. در تصویر ۱۱-۱ محور عمودی و افقی به ترتیب متغیرهای y_{t+1} , y_t را مشخص می‌نمایند. نیمساز مربع اول و تابع (۱۴۱) هر دو ترسیم شده‌اند. فرض کنید جواب اولیه معادله (۱۴۱) y_0 است. چون $y_1= f(y_0)$ مقدار y_1 برابر y_0A خواهد بود بدین ترتیب که عمودی از y_0 اخراج می‌کنیم تا منحنی $f(y_t)$ را در نقطه A قطع کند. مقدار y_1 بدین ترتیب بر روی محور عمودی مشخص می‌شود. این مقدار y_1 را توسط نیمساز بر روی محور افقی پیدا می‌کنیم. مجدداً با اخراج یک عمود از y_1 تا نقطه C مقدار y_2 بر روی محور عمودی بدست خواهد آمد.



تصویر ۱۱-۱

بدین ترتیب با تکرار این عمل خط شکسته ...ABCDEF بدست می‌آید که روند زمانی y_t را نشان می‌دهد و در این تصویر به سمت تعادل (نقطه Q) نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. تصویر ۱۱-۱ به نام «دیاگرام فاز» (phase diagram) و نمودار $f(y_t)$ به عنوان «خط فاز» (phase line) نامیده می‌شوند.

۱۱-۲-۲- ثبات پویای تعادل

بطورکلی معادله تفاضلی مرتبه اول چهار نوع روند زمانی متفاوت می‌تواند داشته باشد. چگونگی روند زمانی y_t بستگی به شیب تابع f دارد. این چهار نوع روند زمانی میرا بدون نوسان و غیرمیرا بدون نوسان و میرا با نوسان و غیرمیرا با نوسان می‌باشند. حال به توضیح هر یک می‌پردازیم.

الف: میرا بدون نوسان: اگر شیب تابع $f(y_t)$ مثبت و کمتر از شیب خط نیمساز باشد این حالت اتفاق می‌افتد. به عبارت دیگر:

$$0<\frac{dy_{t+1}}{dy_t}=\frac{df(y_t)}{dy_t}<1 \qquad (۱۴۲)$$

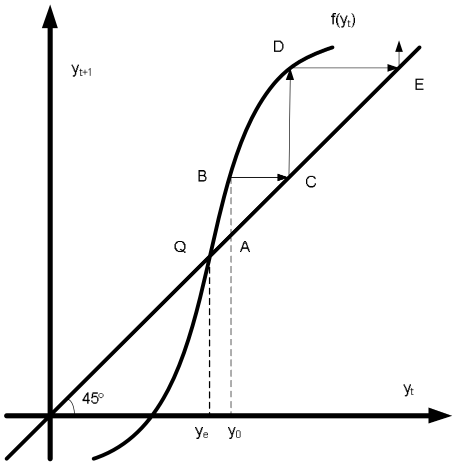
نامعادله (۱۴۲) بدین معنی است که خط فاز نیمساز ربع اول را از بالا قطع کند. این حالت در تصویر ۱۱-۱ نشان داده شده است. میرا بودن این روند زمانی ناشی از کوچکتر از یک بودن مشتق در (۱۴۲) است. به عبارت دیگر ...AB>CD>EF> می‌باشد. یعنی نسبت تغییرات y_{t+1} به y_t کمتر از یک است. بدون نوسان بودن روند زمانی y_t ناشی از این است که مشتق (۱۴۲) بزرگتر از صفر است. یعنی تغییرات y_{t+1} به y_t مثبت است. پس هیچگاه روند زمانی مورد نظر به آن طرف نقطه تعادل Q نخواهد رفت. به عبارت دیگر تغییرات تغییرات y_t کوچک و بزرگ نخواهند شد. در تصویر ۱۱-۱ نقطه مقدار اولیه y_0 در سمت چپ مقدار تعادل y_e قرار دارد. اگر y_0 در سمت راست y_e هم باشد تفاوتی ایجاد نخواهد کرد.

ب: غیرمیرا بدون نوسان: این حالت در زمانی اتفاق می‌افتد که شیب خط فاز بیش از شیب نیمساز ربع اول باشد. بدین ترتیب:

$$\frac{dy_{t+1}}{dy_t}=\frac{df(y_t)}{dy_t}>1 \qquad (۱۴۳)$$

در این حالت $f(y_t)$ نیمساز را از پائین قطع می‌کند. این حالت در تصویر ۱۱-۲ نمایان می‌باشد.

همانطور که پیداست ...<DE<BC و همواره از نقطه تعادل Q دور می‌شویم و y_t بی‌ثبات است.



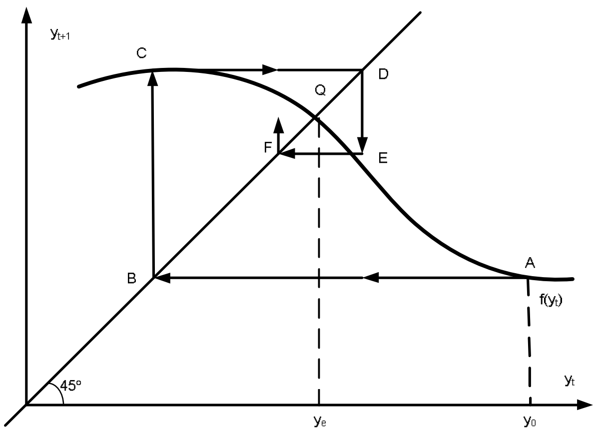
تصویر ۱۱-۲

ج: با نوسان میرا

در این حالت شیب خط فاز منفی و بیش از ۱- می‌باشد به عبارت دیگر:

$$-1 < \frac{dy_{t+1}}{dy_t} = \frac{df(y_t)}{dy_t} < 0 \qquad (۱۴۴)$$

در این حالت روند زمانی y_t شکل تار عنکبوت را دارد و به دور نقطه تعادل y_e می‌چرخد و همواره به آن نزدیکتر می‌شود. این روند زمانی با ثبات و با نوسان می‌باشد. (تصویر ۱۱-۳).



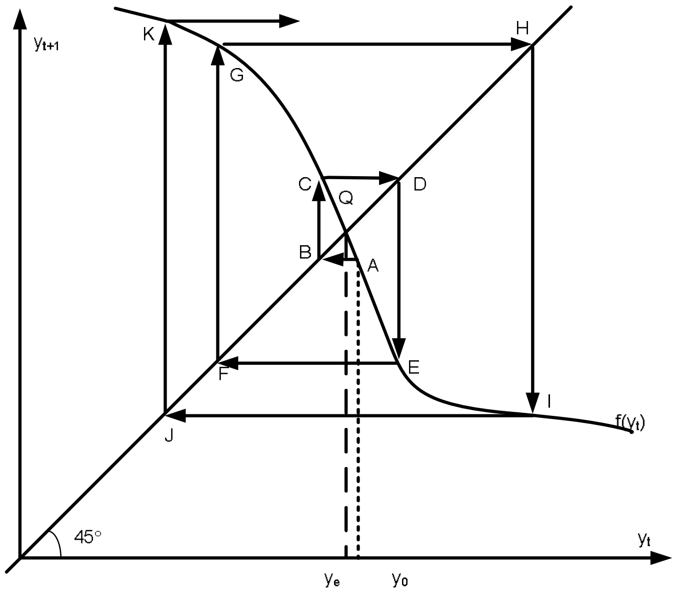
تصویر ۱۱-۳

د: غیرمیرا با نوسان

در این حالت شیب خط فاز کمتر از منفی یک می‌باشد:

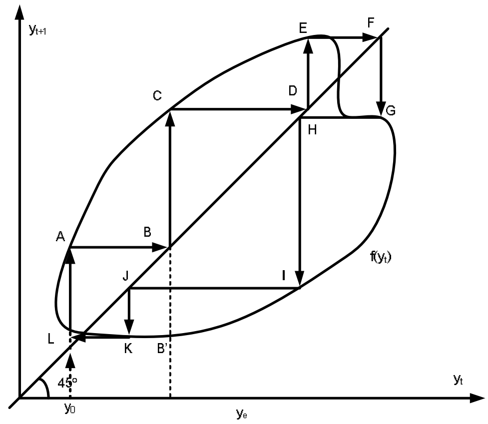
$$\frac{dy_{t+1}}{dy_t} = \frac{df(y_t)}{dy_t} < 1 \qquad (۱۴۵)$$

این حالت در تصویر ۱۱-۴ نمایان است. روند زمانی همواره به دور نقطه تعادل y_e می‌چرخد و از آن دورتر می‌شود.



تصویر ۱۱-۴

حالات دیگری را نیز می‌توان در نظر گرفت که خط فار نیمساز را قطع ننماید. مثلاً خط فاز بالای نیمساز واقع شود در این حالت y_t بدون حد زیاد و زیادتر خواهد شد. معادلات تفاضلی غیرخطی مرتبه اول می‌توانند ترکیب‌های مختلفی از حالات ذکر شده را نیز داشته باشند. برای مثال به نمودار ۱۱-۵ توجه کنید. در این نمودار چهار حالت ذکر شده نشان داده شده‌اند. البته اینکه کدتم مقدار y_{t+1} را در مقادیر چندگانه $f(y_t)$ باید انتخاب نمود اجتناب کرده‌ایم (برای مثال از نقطه B به C باید رفت یا به B'). برای بحث در این موضوع به (۱۹۵۸) Baumol مراجعه شود.

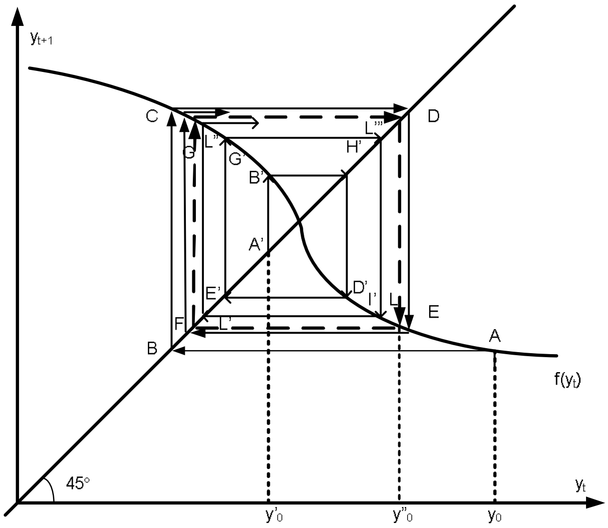


تصویر ۱۱–۵

۱۱-۲-۳- سیکل‌های حدی در روند زمانی

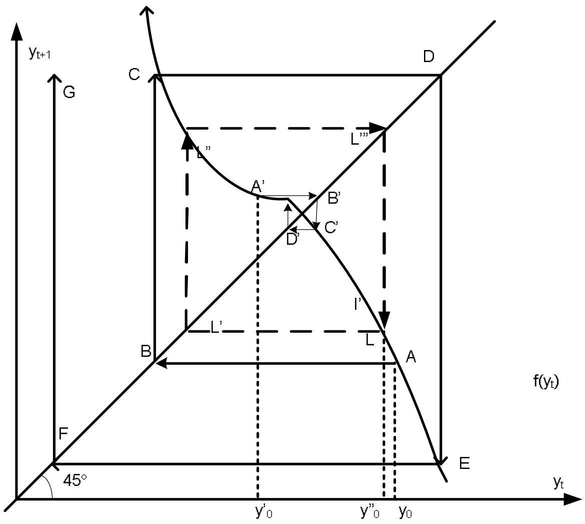
قبلاً اشاره کرده‌ایم که سیکل‌های با دامنه نوسان ثابت را می‌توان با خطوط فاز بسته همانند اشکال دایره شکل، بیضی، قلب شکل و یا چندوجهی ایجاد نمود. نوع دیگری از خط فاز وجود دارد که می‌تواند سیکل‌هائی ایجاد کند که نه میرا باشد و نه غیرمیرا. بطور مثال تصویر ۱۱-۶ را در نظر بگیرید که شیب مقدار قدرمطلق خط فاز نزدیک نیمساز بیش از یک می‌باشد و شیب سر و ته آن با قدر مطلق کمتر از یک باشد. در چنین حالتی یک شرط اولیه y_0 که در قسمت تخت خط فاز قرار می‌گیرد روند زمانی از نوع (ج) (۱۴۴) با نوسان میرا ایجاد خواهد کرد که با ...ABCDEFG نمایش داده شده است. ولی یک شرط اولیه y'_0 که در قسمت پرشیب خط فاز قرار می‌گیرد روند زمانی از نوع (د) (۱۴۵) با نوسان غیرمیرا ایجاد خواهد کرد که با ...A'B'CD'E'F'G' نشان داده شده است.

این دو روند زمانی یکی میرا با نوسان و یکی غیرمیرا با نوسان نهایتاً هر دو به سمت سیکل حدی با ثبات میل خواهند کرد که مرز بین دو سیکل مزبور می‌باشد و در تصویر ۱۱-۶ با LL'L"L"' نشان داده شده است. حال اگر یک نقطه شروع اولیه مانند y_0'' را انتخاب کنیم روند زمانی در طول سیکل حدی دور خواهد زد و نه میرا خواهد بود و نه غیرمیرا. در این حالت سیکل حدی را می‌توانیم یک روند زمانی باثبات با تعادل متحرکت بخوانیم. این تعادل باثبات است زیرا هرگاه از این سیکل حدی دور شویم مجدداً به سمت آن نزدیک خواهیم شد.



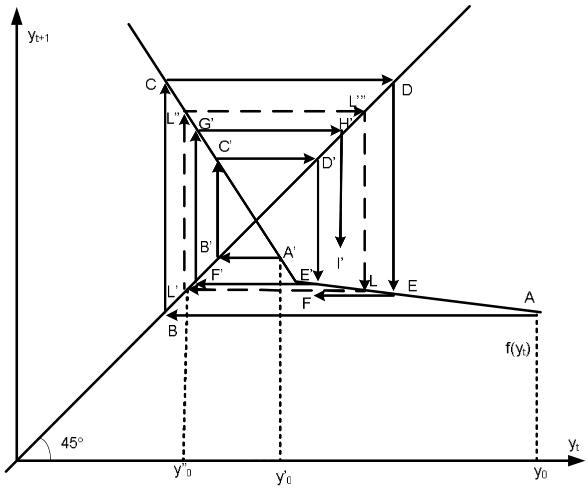
تصویر ۱۱-۶

سیکل حدی تصویر ۱۱-۶ یک باثبات بود. می‌توان سیکل حدی بی‌ثبات را نیز همانند فوق ترسیم نمود. این سیکل طوری است که اگر از آن جدا شویم همچنان دورتر و دورتر از آن خواهیم شد. این سیکل حدی را با خط فازی که شیب آن منفی و نزدیک نیمساز تخت و در سروته آن پرشیب می‌باشد می‌توان نشان داد. این حالت در تصویر ۱۱-۷ نمایان است.



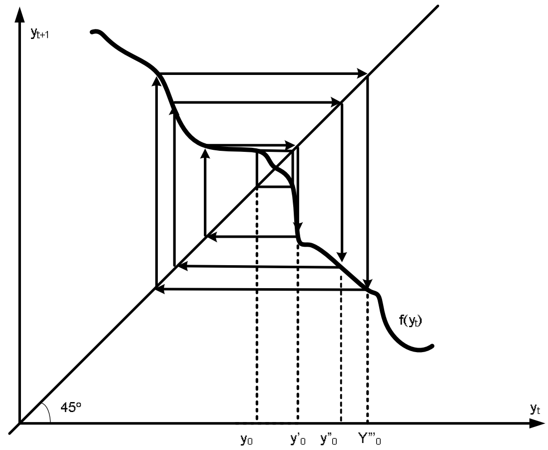
تصویر ۱۱-۷

سیکل حدی با ثبات دیگری را همانند تصویر ۱۱-۶ می‌توان با استفاده از خط فاز خطی ولی شکسته ترسیم نمود. این حالت که در تصویر ۱۱-۸ آمده است به نام حلقه حدی یک تاب (one kink limit cycle) خوانده می‌شود. این خط فاز همچنین می‌تواند یک منحنی با شکل متشابه باشد. این سیکل همانند سیکل حدی بسته عمل می‌کند و سیکل‌های داخلی غیرمیرا و سیکل‌های خارجی میرا دارد که هر دو به سمت مرز مشترک آنها که حلقه حدی یک تاب می‌باشد میل خواهند کرد. این حلقه حدی مجدداً یک تعادل باثبات متحرک را ایجاد می‌کند. این تصویر نشان می‌دهد که هر دو سر خط فاز لزوماً نباید کم شیب باشند بلکه یک طرف آن برای ایجاد حلقه حدی باثبات کافی است.



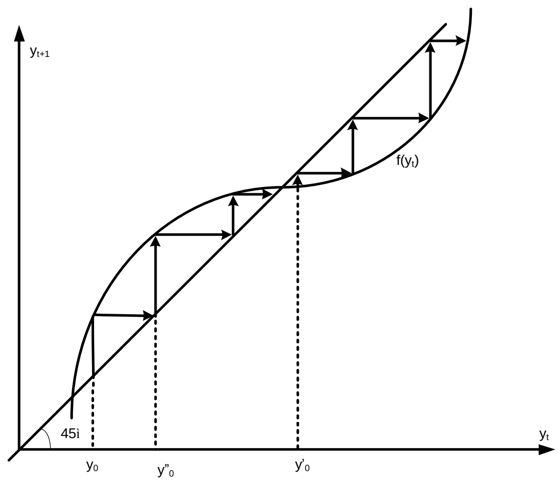
تصویر ۱۱-۸

حالت‌های دیگری را نیز می‌توان بررسی نمود که به حلقه‌های چندگانه موسوم می‌باشند. در این حالت خط فاز با شیب منفی و متغیر می‌باشد که قدرمطلق شیب آن چندین بار کمتر و بیشتر از ۱ می‌شود. در این حالت حلقه‌های حدی باثبات و بی‌ثبات ایجاد می‌شود و تعادل‌های چندگانه باثبات و بی‌ثبات متحرک در رابطه با انتخاب مقدار اولیه خواهیم داشت. این حلقه‌های حدی همگی هم‌مرکز و تودرتو می‌باشند. وقتی از خط نیمساز دور می‌شویم خط فاز اول پرشیب و بعد تخت شود حلقه حدی باثبات ایجاد خواهد کرد. و بلعکس اگر اول تخت و بعد پرشیب باشد حلقه حدی بی‌ثبات ایجاد خواهد شد. این حالت در تصویر ۱۱-۹ نمایان است.



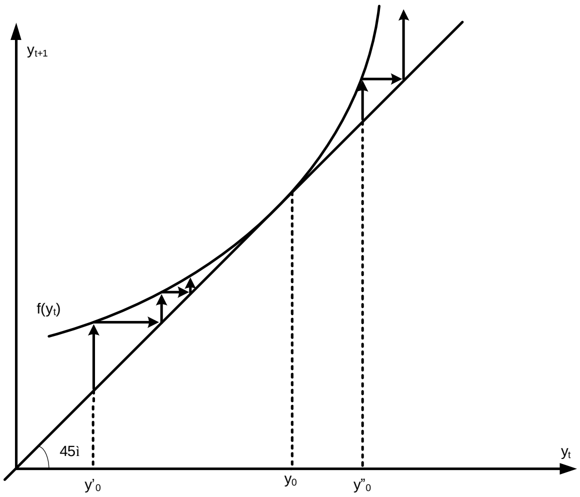
تصویر ۱۱-۹

بدین ترتیب در معادلات تفاضلی غیرخطی مقدار شرط اولیه نقش مهمی در باثبات یا بی‌ثبات بودن تعادل دارد. حالات بحث شده در نمودارهای فوق همگی برای حالتی بود که شیب خط فاز منفی باشد. بحث‌های مشابهی را نیز می‌توان برای زمانی که خط فاز دارای شیب مثبت می‌باشد و همچنین بیش از یکبار خط نیمساز را قطع می‌کند بررسی نمود که در اینجا از ذکر آن خودداری می‌شود و فقط نظر خواننده را به تصاویر ۱۱-۱۰ و ۱۱-۱۱ جلب می‌کنیم که در آن دو نوع روند زمانی میرا و غیرمیرا هر دو نشان داده شده‌اند.



تصویر ۱۱-۱۰

در این تصویر روند زمانی با شرط اولیه y_0 اول غیرمیرا و بعد میرا می‌باشد ولی با شرط اولیه y_0'' همچنان میرا می‌باشد. در تصویر ۱۱-۱۱ نیز اگر شرط اولیه در سمت چپ y_0 قرار گیرد چون y_0' روند زمانی میرا و باثبات است و چنانچه در نقطه y_0'' واقع شود روند زمانی y_t غیرمیرا و بی‌ثبات است. مثال‌های زیاد دیگری را نیز می‌توان بررسی نمود که صرفنظر می‌نمائیم.



تصویر ۱۱-۱۱

نکته دیگری که در رابطه با حلقه‌های حدی باید اضافه کرد امکان یافتن محل این حلقه‌ها می‌باشد. به عبارت دیگر این حلقه توسط مربع‌هائی تشکیل می‌شود که دو گوشه متقابل آن بر روی خط فاز قرار دارند. بدین ترتیب دو نقطه با طول‌های s,u در تصویر ۱۱-۹ می‌توان یافت که این حلقه‌ها را تشکیل می‌دهند. مقادیر u,s را با استفاده از خط فاز می‌توانیم بدست آوریم. مختصات دو گوشه مخالف L'',L دو معادله با دو مجهول s,u به ما می‌دهند. در نقطه L'' داریم:

$$y_{t+1}=u\ , \qquad y_t= s$$

چون داریم $y_{t+1}= f(y_t)$ پس می‌توان نوشت:

$$u= f(s) \tag{۱۴۶}$$

به همین ترتیب در L داریم:

$$y_{t+1}= s\ \ , y_t= u$$

و در نتیجه:

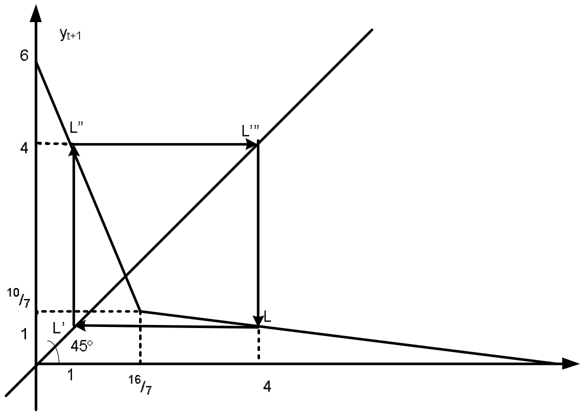
$$s= f(u) \tag{۱۴۷}$$

در معاله (۱۴۶) و (۱۴۷) را می‌توان همزمان برای s,u حل کرده و مختصات دو گوشه حلقه حدی را پیدا نمود.

مثال ۱۱-۷

خط فاز یک تابی را در نظر بگیرید که قسمت بالای آن با $y^H_{t+1}= 6-2y_t$ و قسمت پائین آن با $y^L_{t+1}= 2\frac{1}{4}y_t$ مشخص شده باشد. این دو تیکه خط فاز در نقطه $y^L_{t+1}= y^H_{t+1}$ متقاطع هستند. مطلوب است مختصات محل حلقه حدی را محاسبه کنید.

برای توضیح بیشتر معادلات فوق را در تصویر ۱۱-۱۲ رسم می‌کنیم. مختصات نقطه را با قطع دو قسمت خط فاز بدست می‌آوریم.



تصویر ۱۱-۱۲

به عبارت دیگر:

$$2-\frac{1}{4}y_t= 6-2y_t \implies y_t= \frac{16}{7} \implies y_{t+1}= \frac{10}{7}$$

از آنجائی که نقطه L در سمت راست این نقطه واقع خواهد شد بر روی تیکه پائین خط فاز قرار خواهد گرفت. بنابراین بر اساس (۱۴۷) می‌توانیم بنویسیم: $s=f(u)=2-\frac{1}{4}u$

و همچنین برای نقطه 'L که در تیکه بالای خط فاز قرار دارد می‌توان نوشت: $u=f(s)=6-2s$

بدین ترتیب $s=1, u=4$ و مختصات نقاط دو گوشه حلقه برابرند با $L=(4,1)$ و $L''=(1,4)$ مختصات دو گوشه دیگر بر روی نیمساز و در نقاط $L'= (1,1)$ و $L'''= (4,4)$ واقعند.

۱۱-۲-۴- سیکل‌های تخفیف یابنده

الگوی ادوار تجاری Hicks (1950) مثال خوبی را برای خط فاز یک تاب می‌باشد زیرا غیرخطی بودن آن شکل تاب (گوشه‌های تیز) را بخود می‌گیرد. در الگوی هیکز درآمد ملی به مصرف و سرمایه‌گذاری تقسیم می‌شود. وی مصرف C_t در زمان t را نسبت ثابتی از درآمد در دوره قبل y_{t+1} بعلاوه یک مقدار ثابت در نظر می‌گیرد:

$$C_t = ay_{t-1} + b \qquad (۱۴۸)$$

رابطه سرمایه‌گذاری در طی ادوار تجاری متفاوت است. فرض کنید یک نسبت بهینه k بین موجودی سرمایه ملی K_t و تولید یا درآمد ملی وجود دارد. بدین ترتیب در زمانی که به سمت رکود فعالیت‌های اقتصادی در حرکت هستیم مازاد موجودی سرمایه خواهیم داشت. سرمایه‌گذاری جدید و سرمایه‌گذاری برای جایگزینی استهلاک انجام نخواهد شد و موجودی انبارها روبه کاهش خواهند بود. این وضعیت را به شکل زیر می‌توان نشان داد:

$$I_t = -w \qquad \text{برای} \qquad K_{t-1} > ky_{t-1} \qquad (۱۴۹)$$

که w یک ثابت مثبت می‌باشد و I_t برابر سرمایه‌گذاری در زمان t خواهد بود.

از طرف دیگر زمانیکه مازاد موجودی سرمایه نداریم با افزایش درآمد سرمایه‌گذاری برای حفظ موجودی سرمایه در آن مقدار مطلوب درآمد افزایش خواهد یافت. این امر سبب اصل شتاب خواهد شد که در ذیل نمایش داده شده است:

$$I_t = K_t - K_{t-1} = k(y_t - y_{t-1}) \qquad \text{برای} \quad K_{t-1} \leq ky_{t-1} \qquad (۱۵۰)$$

همانطور که گفته شد درآمد را به دو قسمت مصرف و سرمایه‌گذاری تقسیم می‌کنیم.

$$y_t = I_t + C_t \qquad (۱۵۱)$$

زمانیکه مازاد سرمایه داشته باشیم با جایگزینی (۱۴۸) و (۱۴۹) در (۱۵۱) می‌توان نوشت:

$$y_t = ay_{t-1} + b - w \qquad \text{برای} \qquad K_{t-1} > ky_{t-1}$$

معادله فوق یک معادله تفاضلی مرتبه اول است که در تصویر ۱۱-۱۳ با خط فاز RR' نمایش داده شده است. چون شیب این خط فاز a برابر تمایل نهائی به مصرف است کمتر از یک می‌باشد و باید خط نیمساز را از بالا قطع کند. از طرف دیگر وقتی مازاد سرمایه نداریم درآمد با رابطه فوق مشخص نمی‌شود بلکه از (۱۴۸) و (۱۵۰) و (۱۵۱) می‌توان نوشت:

$y_t = ay_{t-1} + k(y_t - y_{t-1}) + b$

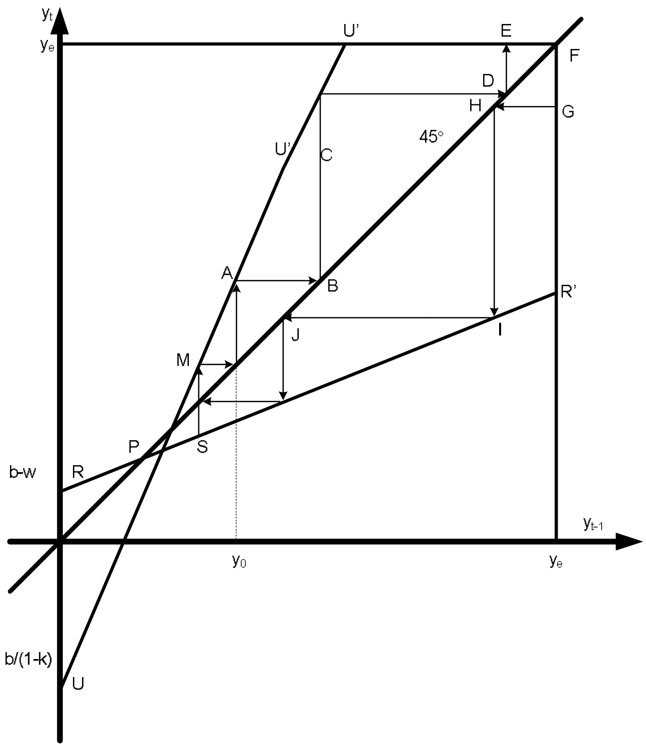
یا به عبارت دیگر:

$$y_t = \frac{a-k}{1-k} y_{t-1} + \frac{b}{1-k} \qquad (۱۵۳)$$

که بر اساس مشاهدات اقتصادی- انتظار داریم که: $k>1>a>0$. پس بنابراین:

$$\frac{a-k}{1-k} = \frac{k-a}{k-1} > 1 \qquad , \frac{b}{1-k} < 0$$

بدین ترتیب معادله (۱۵۳) در تصویر ۱۱-۱۳ را خط فاز UU' نشان می‌دهیم.



تصویر ۱۱-۱۳

حال محدودیتی را در نظر می‌گیریم که حداکثر مقدار درآمد y_e و بیانگر بازدهی اقتصاد در اشتغال کامل منابع می‌باشد. این شرط اجازه نمی‌دهد که روند زمانی y_t در حول و حوش خط فاز UU' به بی‌نهایت برود. در این حالت y_t باید درون مربع Oy_eFy_e قرار داشته باشد. پس به عبارت دیگر داریم: $y_t \le y_t$

در زمان رونق اقتصادی خط فاز 'UU از معادله (۱۵۳) مورد استفاده واقع شده تقاضای سرمایه افزایش می‌یابد و درآمد ملی روبه افزایش خواهد بود. روند زمانی ABCD خواهد بود. نهایتاً در نقطه E به درآمد اشتغال کامل خواهیم رسید. در این نقطه درآمد نمی‌تواند افزایش یابد و باید مجدداً کاهش یابد زیرا سرمایه‌گذاری بدلیل ثابت شدن درآمد افزایش نمی‌یابد (۱۵۰). بنابراین مؤلفه سرمایه‌گذاری در درآمد (۱۵۱) به صفر کاهش می‌یابد. از (۱۴۸) و (۱۴۹) و (۱۵۱) درآمد را برای دوره بعد می‌نویسیم: $y_{t+1}= ay_e+ b-w$

درآمد در این دوره در نقطه G نشان داده شده است که کمتر از درآمد y_e در اشتغال کامل می‌باشد. با کاهش درآمد مازاد سرمایه به وجود خواهد آمد $K_t>ky_t$ و بر طبق (۱۵۲) درآمد شروع به کاهش درآمد شروع به کاهش در حول و حوش 'RR خواهد کرد. روند زمانی در این دوران برابر ...HIJ و به سمت نقطه تعادل P خواهد بود. این نقطه به تعادل درآمد ملی پائینی هیکز معروف است. در این دوران موجودی سرمایه K_t با مقدار w در هر دوره زمانی کاهش می‌یابد. درآمد آنقدر کاهش می‌یابد تا سرمایه که به مقدار اشتغال کامل رسیده بود کاهش یافته و به اندازه مناسب برسد. و این عمل s دوره بعد از دوره زمانی e اتفاق می‌افتد و s کوچکترین عدد صحیحی است که: $K_e- ws \leq ky_{e+s}$

از آنجائی که سطح درآمد نمی‌تواند پائین‌تر از حد تعادل y_b برود دوران رکود تا نقطه زیر بیشتر ادامه نمی‌تواند داشته باشد: $K_e- ws= ky_b$

یا به عبارت دیگر:
$$s=\frac{k_e-ky_b}{w}$$

در این زمان موجودی سرمایه بیش از حد مطلوب آن نخواهد بود. سرمایه‌گذاری بوسیله (۱۵۰) مجدداً روبه افزایش خواهد گذاشت و در اثر آن درآمد شروع به افزایش خواهد نمود چون مؤلفه سرمایه‌گذاری منفی حذف می‌شود. درآمد به نقطه M افزایش می‌یابد و دوران رونق در طول خط فاز 'UU شروع خواهد شد و بدین ترتیب سیکل تجاری دیگری ایجاد می‌شود.

در الگوی فوق دیدیم که یک روند زمانی حلقوی با دامنه نوسان ثابت چطور ایجاد شد. در اصل پیش فرض ما این بود که دوران تجاری دوم و غیره منطبق بر دوران تجاری اول خواهد بود و هیچگونه دخالت برون‌زای دیگری وجود ندارد که این روند زمانی را تغییر دهد. از طرفی

می‌دانیم که ظرفیت تولید اقتصاد در طول زمان افزایش یافته و نتیجتاً نقطه y_e دورتر از مبدأ O قرار خواهد گرفت. در این حالت نیز روند زمانی حلقوی ما با دامنه نوسان ثابت نخواهد بود.

چنین حلقه‌های غیرخطی که توسط الگوهای مشابه و یا تغییر ناگهانی در مکانیزم روند زمانی مشخص می‌شوند (مثلاً تغییر از 'UU به 'RR) سیکل‌های تخفیف یابنده (relaxation cycles) خوانده می‌شوند.

تمرین ۱۵

معادلات تفاضلی زیر را حل کنید.

1- $y_t + y_{t+1} = y_t y_{t+1}$ (راهنمائی قرار دهید: $v_t = \frac{1}{y_t}$)

2- $y_t + y_{t+1} = 2y_t + 1$ (راهنمائی قرار دهید: $y_t = c(1/v_t)$ و c را انتخاب کنید)

3- $y_t y_{t+1} y_{t+2} = y_t + y_{t+1} + y_{t+2}$ (راهنمائی قرار دهید: $y_t = tg(u_t)$)

4- $y_t y_{t+1} y_{t+2} = k(y_t + y_{t+1} + y_{t+2})$ k یک عدد ثابت است

5- $y^3_{t+1} = 3y_t$, $y_0 = 1$ (راهنمائی: لگاریتم بگیرید).

6- $y_{t+2} = y_t\, y_{t+1}$

7- $y_{t+1} = 2y^2_t - 1$

8- $y_t^2 = 1/y_{t-1}\, y_{t+1}$

9- $y^2_{t+1} - 5y_{t+1}y_t + 6y_t^2 = 0$

10- $y_{t+1} = \sqrt{2 + y_t}$ $y_0 = 0$

11- $y_t\, y_{t+1} = 1 = 2^t (y_{t+1} - y_t)$

12- نشان دهید که می‌توان معادله تفاضلی $y_{t+1}\, y_t + A_t y_t + B_t y_{t+1} = C_t$ را با جایگزین کردن $y_t = \frac{v_{t+1}}{v_t} - A_t$ به یک معادله خطی تبدیل نمود. (نگاه کنید به مسئله ۲ بالا).

13- نشان دهید اگر a_1 , a_2 , a_3 مقادیر ثابتی باشند معادله زیر را با جایگزین کردن $y_t = b_1 b_2 \ldots b_{t-1} u_t$ می‌توان به یک معادله با ضرائب ثابت تبدیل نمود.

$y_{t+3} + a_1 b_t y_{t+2} + a_2 b_t b_{t-1} y_{t+1} + a_3 b_t b_{t-1} b_{t-2}\, y_t = f(t)$

14- معادله تفاضلی $y_{t+1} = \frac{A}{B + y_t}$ را با قرار دادن $B + y_t = \frac{u_{t+1}}{u_t}$ حل کنید.

15- معادله $y_t y_{t+1} = \frac{a}{t+1}$ را حل کنید.

۱۲- دستگاه معادلات تفاضلی خطی همزمان

تابحال معادلات تفاضلی را ملاحظه کردیم که به تنهائی بیانگر یک رابطه ریاضی بودند. در این فصل معادلات تفاضلی همزمان را بررسی می‌نمائیم. به عبارت دیگر هدف این بخش نشان دادن چگونگی حل دستگاه معادلات تفاضلی خطی می‌باشد. نظریه‌ها و مسائل زیادی در اقتصاد وجود دارند که از دستگاه معادلات تفاضلی همزمان استفاده می‌کنند. برای مثال الگوهائی که در توضیح ادوار تجاری بکار برده می‌شوند (نگاه کنید به Tintner (1942)) یا تحلیل‌های بهم‌فزاینده (نگاه کنید به Chipman (1951) Turvey (1953) Goodwin (1949)) یا الگوهای داده- ستانده دینامیک (نگاه کنید به Leontief (1953), Dorfman, Samuelson Solow (1957)) و نظیر آنها در سایر تحلیل‌های اقتصادی از دستگاه معادلات تفاضلی همزمان برای بررسی موارد یاد شده استفاده می‌کنند. روشهای سیستم‌های دینامیکی نیز از دستگاه معادلات تفاضلی همزمان استفاده می‌نمایند.

۱۲-۱- شکل کلی دستگاه معادلات تفاضلی خطی

بیان شکل کلی دستگاه معادلات تفاضلی بدون استفاده از اپراتور E و ماتریس‌ها کمی حجیم می‌باشد لذا بعد از اشاره به مثال زیر سعی می‌کنیم شکل کلی آنرا با استفاده از اپراتورها بیان کنیم. دو معادله تفاضلی زیر برحسب y_1, y_2 در دستگاه معادلات زیر نشان داده شده‌اند. اندیس‌های اول ۱ و ۲ در متغیرها بیانگر زمان نیستند و معرف متغیر شماره یک و دو می‌باشند.

$$\begin{cases} 5y_{1,t+6} - 3y_{1,t+5} + 7y_{1,t+1} - 2y_{2,t+6} + 55y_{2,t+3} + 17 = 0 \\ 7y_{1,t+6} + 2y_{1,t+4} + 5y_{2,t} = 0 \end{cases}$$

معادلات فوق را با استفاده از اپراتور E می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{cases} (5E^6 - 3E^5 + 7E)\, y_{1,t} + (-2E^6 + 55E^3)\, y_{2,t} + 17 = 0 \\ (7E^6 + 2E^4)\, y_{1,t} + (5) y_{2,t} = 0 \end{cases}$$

بطور کلی همانطور که در فصول قبل ذکر گردید هر معادله تفاضلی خطی را می‌توانیم با استفاده از اپرتور E بیان کنیم و گفتیم که یک معادله تفاضلی مرتبه n را می‌توان با استفاده از یک پولی‌نومیال از E بیان نمود. به عبارت دیگر فرض کنید:

$$P(E) = a_0E^n + a_1E^{n-1} + \ldots + a_{n-1}E + a_n \qquad (۱۵۴)$$

با استفاده از (۱۵۴) هر معادله تفاضلی خطی مرتبه n را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$P(E)\, y_t + K = 0 \qquad (۱۵۵)$$

با استفاده از (۱۵۴) و (۱۵۵) دستگاه معادلات تفاضلی خطی را با m معادله و m مجهول می‌توان به شکل زیر تعریف نمود:

$$\begin{aligned} &p_{11}(E)\, y_{1t} + p_{12}(E)\, y_{2t} + \ldots + p_{1m}(E)\, y_{mt} + k_1 = 0 \\ &p_{21}(E)\, y_{1t} + p_{22}(E)\, y_{2t} + \ldots + p_{2m}(E)\, y_{mt} + k_2 = 0 \\ &\vdots \\ &p_{m1}(E)\, y_{1t} + p_{m2}(E)\, y_{2t} + \ldots + p_{mm}(E)\, y_{mt} + k_m = 0 \end{aligned} \qquad (۱۵۵)$$

که $p_{ij}(m)$ $i,j=1,\ldots,m$ همه پولی‌نومیال‌هائی از E می‌باشند. دستگاه معادلات (۱۵۵) را می‌توان با استفاده از ماتریس‌ها به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} p_{11}(E) & p_{12}(E) & \cdots & p_{1m}(E) \\ p_{21}(E) & p_{22}(E) & \cdots & p_{2m}(E) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{m1}(E) & p_{m2}(E) & \cdots & p_{mm}(E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{mt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۵۶)$$

یا به عبارت دیگر (۱۵۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{P}(E)\, \mathbf{y}_t + \mathbf{K} = \mathbf{0} \qquad (۱۵۷)$$

که $\mathbf{P}(E)$ ماتریس mxm و $\mathbf{y}_t$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{0}$ بردارهائی به ابعاد mx1 می‌باشند.

۱۲-۱-۱- تبدیل به دستگاه معادلات مرتبه اول

تجزیه و تحلیل و حل دستگاه معادلات تفاضلی مرتبه اول خیلی ساده‌تر از دستگاه‌های با مراتب بالاتر می‌باشد. مخصوصاً همانطور که در قسمت‌های بعدی خواهیم دید جبر ماتریس‌ها نیز در این مورد باعث سهولت حل اینگونه دستگاه‌ها خواهد شد و قضایای مناسبی در جبر ماتریس‌ها داریم که در مورد دستگاه معادلات تفاضلی مرتبه اول صادق می‌باشند. بنابراین مناسب است که دستگاه‌های با مرتبه بالاتر را به دستگاه‌هائی با مرتبه یک تبدیل کنیم که به همان جواب دستگاه مرتبه بالاتر می‌رسد. تبدیل هر دستگاه معادلات تفاضلی خطی به یک دستگاه معادلات تفاضلی خطی با مرتبه اول همیشه امکانپذیر است و آنرا می‌توان با استفاده از روابط جدید ایجاد نمود. روش تبدیل بدین شکل است که متغیر مصنوعی جدیدی را به عنوان مقدار متغیر موجود در معادلات در زمان بعد تعریف می‌کنیم. برای توضیح این روش به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱۲-۱

معادله زیر را به یک دستگاه مرتبه اول تبدیل کنید: $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0$

متغیر مصنوعی x_t را به شکل زیر تعریف می‌کنیم: $x_t = y_{t+1}$

این رابطه را در معادله صورت مسئله جایگزین می‌کنیم: خواهیم داشت: $x_{t+1} = 4x_t - 3y_t$

دستگاه معادلات تبدیل شده برابر خواهد بود با:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 4x_t - 3y_t \\ x_t - y_{t+1} = 0 \end{cases}$$

مثال ۱۲-۲

دستگاه معادلات تفاضلی زیر را به یک دستگاه معادلات تفاضلی مرتبه اول تبدیل کنید:

$$\begin{cases} y_{t+3} - 2y_{t+2} + 3y_{t+1} + y_t - 3x_t = 5 \\ y_{t+2} - 4y_{t+1} + 7y_t + x_{t+1} = 1 \end{cases}$$

دو متغیر مصنوعی زیر را تعریف می‌کنیم.

$$z_t = w_{t+1}$$
$$w_t = y_{t+1}$$

مقادیر فوق را در معادله تفاضلی صورت مسئله جایگزین می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$z_{t+1} = 2z_t - 3w_t - y_t + 3x_t + 5$$
$$x_{t+1} = -z_t + 4w_t - 7y_t + 1$$

دستگاه معادلات ما تبدیل به چهار معادله و چهار مجهول خواهد شد:

$$\begin{cases} z_t - w_{t+1} = 0 \\ w_t - y_{t+1} = 0 \\ z_{t+1} - 2z_t + 3w_t + y_t - 3x_t - 5 = 0 \\ x_{t+1} + z_t - 4w_t + 7y_t - 1 = 0 \end{cases}$$

۱۲-۲- حل دستگاه معادلات تفاضلی خطی

حل عددی دستگاه معادلات تفاضلی خطی را براحتی همانند یک معادله تفاضلی برای دوره زمانی دلخواه می‌توان بدست آورد و جواب عددی با جایگزینی مقادیر شروط اولیه و محاسبه دوره‌های زمانی بعد بسادگی محاسبه می‌شود. حال به روش حل عمومی می‌پردازیم.

۱۲-۲-۱- روش مستقیم

روش آزمون و خطائی که برای یافتن جواب آزمایشی در حل تک معادلات بکار بردیم در دستگاه معادلات همزمان نیز براحتی قابل استفاده می‌باشد. در حالت m معادله و m مجهول، همانند معادلات تکی می‌توان جواب‌های آزمایشی را برای پیداکردن m تابع مکمل دستگاه

معادلات همگن بکار برد:

$$y_{1t} = p_1x^t\ ,\ y_{2t} = p_2x^t\ ,\ ..\ ,\ y_{mt} = p_mx^t \quad (۱۵۸)$$

که p_1 , p_2 ,…, p_m مقادیر ثابت هستند. این مقادیر را با مقدار x چنان پیدا می‌کنیم که دستگاه معادلات همگن شده ما را برقرار نمایند. همانطور که خواهیم دید همانند معادلات تکی مقادیر زیادی از x وجود دارند که معادلات ما را برقرار می‌نمایند. با ضرب این جواب‌ها در یک ثابت دلخواه و عملیات جبری ساده یک جواب عمومی برای دستگاه معادلات همگن بدست می‌آوریم. با اضافه کردن جواب‌های خاص و اصلاح برای شرایط اولیه جواب نهائی را بدست خواهیم آورد. شباهت روش مستقیم در حالات m و یک معادله به وضوح روشن می‌باشد.

مثال ۱۲-۳

معادلات تفاضلی زیر را با شرایط اولیه $y_{1,0} = 19$, $y_{2,0} = 5$ حل کنید:

$$\begin{cases} y_{1,t+1} - 6y_{1,t} + 8y_{2,t} = -9 \\ y_{1,t} - y_{2,t+1} = 0 \end{cases}$$

دستگاه معادلات همگن را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} y_{1,t+1} - 6y_{1,t} + 3y_{2,t} = 0 \\ y_{1t} - y_{2,t+1} = 0 \end{cases}$$

با استفاده از (۱۵۸) جواب آزمایشی را به این شکل در نظر می‌گیریم: $y_{1t}=p_1x^2,\ y_{2t}=p_2x^t$

روابط فوق را در معادلات تفاضلی همگن جایگزین کرده و طرفین آنها را بر x^t تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} p_1x - 6p_1 + 8p_2 = 0 \\ p_1 - p_2x = 0 \end{cases}$$

این دستگاه معادلات متشکل از دو معادله و سه مجهول x و p_1 و p_2 می‌باشد. این دستگاه را برای x و نسبت $p=p_2/p_1$ حل می‌کنیم. با تقسیم معادله هر p_1 خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x-6 + 8p= 0 \\ 1- px= 0 \end{cases}$$

مقدار p از معادله دوم را در معادله اول قرار می‌دهیم می‌شود: $x^2 - 6x + 8= 0$

این پولی‌نومیال به عنوان معادله کرکتریستیک دستگاه معادلات همزمان مسئله مورد نظر خوانده می‌شود که دارای دو ریشه $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ است. نتیجتاً مقادیر p برابر با $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ خواهد بود. حال به جواب‌های آزمایشی برمی‌گردیم و برای راحتی فرض می‌کنیم $p_1=1$ است. حال دو جفت جواب در ارتباط با دو ریشه معادله کرکتریستیک داریم:

$$y_{1t}^* = 4^t \qquad y_{2t}^* = \tfrac{1}{4}(4)^t$$

$y_{1t}^{**} = 2^t \qquad y_{2t}^{**} = \frac{1}{2}(2)^t$

جواب عمومی برای دستگاه ساده شده همگن را می‌توان به شکل زیر بدست آورد. همانند حالت تک معادله مجموع دو جواب که هرکدام در عدد ثابتی ضرب شوند نیز جواب است.

پس بعنوان جواب عمومی دستگاه همگن می‌نویسیم:

$$y_{1t} = v_1 y_{1t}^{*} + v_2 y_{1t}^{**} = v_1 4^t + v_2 2^t$$
$$y_{2t} = v_1 y_{2t}^{*} + v_2 y_{2t}^{**} = \frac{1}{4} v_1 4^t + \frac{1}{2} v_2 2^t$$

حال برای حل دستگاه غیرهمگن باید جواب خاص را به جواب دستگاه همگن اضافه کنیم.

فرض کنید مقادیر z_2 , z_1 ثابت‌هائی باشند. فرض می‌کنیم: $y_{1t} = z_1 , y_{2t} = z_2$

عبارات فوق را در دستگاه غیرهمگن صورت مسئله جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} z_1 - 6z_1 + 8z_2 = -9 \\ z_1 - z_2 = 0 \end{cases} \implies z_1 = z_2 = -3$$

جواب عمومی با اضافه کردن مقادیر z_2 , z_1 به تابع مکمل بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases} y_{1t} = v_1(4)^t + v_2 2^t - 3 \\ y_{2t} = \frac{1}{4} v_1 4^t + \frac{1}{2} v_2 2^t - 3 \end{cases}$$

برای پیدا کردن جواب نهائی اصلاح شده برای شرایط اولیه در معادلات فوق t را مساوی صفر قرار داده و مقادیر شرایط اولیه را در معادلات فوق جایگزین می‌کنیم. حاصل برابر است با:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 - 3 = 19 \\ \frac{1}{4} v_1 + \frac{1}{2} v_2 - 3 = 5 \end{cases} \implies v_1 = 12 , v_2 = 10$$

جواب نهائی برابر خواهد بود با:

$$\begin{cases} y_{1t} = 3(4)^{t+1} + 5(2)^{t+1} - 3 \\ y_{2t} = 3(4)^t + 5(2)^t - 3 \end{cases}$$

مثال ۱۲-۴

دستگاه معادلات تفاضلی زیر را با شرایط اولیه $z_1 = 0 , y_1 = 2$ حل کنید.

$$\begin{cases} y_{t+1} + z_t - 3y_t = t \\ 3y_t + z_{t+1} - 5z_t = (4)^t \end{cases}$$

دستگاه معادلات فوق را با استفاده از اپراتور E به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (E-3)\, y_t + z_t = t \\ 3y_t + (E-5)\, z_t = 4^t \end{cases} \qquad (*)$$

معادله اول را در (E-5) ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} (E-5)(E-3)\, y_t + (E-5)\, z_t = (E-5)t \\ 3y_t + (E-5)\, z_t = 4^t \end{cases}$$

دو معادله را از هم کسر می‌کنیم. خواهیم داشت: $(E^2 - 8E + 12)\, y_t = 1 - 4t - 4^t$

این معادله تفاضلی را با روشهائی که قبلاً گفته شد حل می‌کنیم:

$$y_t = c_1(2)^t + c_2(6)^t + \frac{1}{4}(4)^t - (\frac{4}{5})t - \frac{19}{25}$$

مقدار y_t را در معادله اول دستگاه (*) می‌گذاریم و z_t را بدست می‌آوریم:

$$z_t = c_1(2)^t - 3c_2(6)^t - \frac{1}{4}(4)^t - (\frac{3}{5})t - \frac{34}{25}$$

$t=0$ را در دو معادله فوق قرار داده و $z_1 = 0\ ,\ y_1 = 2$ را جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2c_1 + 6c_2 = \dfrac{64}{25} \\ 2c_1 - 18c_2 = \dfrac{74}{25} \end{cases} \implies c_1 = \frac{133}{100},\ c_2 = -\frac{1}{60}$$

پس جواب نهائی برابر خواهد بود با

$$\begin{cases} y_t = \dfrac{133}{100}\, 2^t - \dfrac{1}{60}\, 6^t + 4^{t-1} - \dfrac{4}{5}\, t - \dfrac{19}{25} \\ z_t = \dfrac{133}{100}\, 2^t - \dfrac{1}{20}\, 6^t - 4^{t-1} - \dfrac{3}{5}\, t - \dfrac{34}{25} \end{cases}$$

مثال ۱۲-۵

دستگاه معادلات تفاضلی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_{t+1} + 6x_t + 9y_t = 4 \\ y_{t+1} - x_t = 0 \end{cases}$$

برای حل این دستگاه باید توابع مکمل و خاص را پیدا کنیم. برای پیداکردن جواب خاص بدین شکل عمل می‌کنیم که در جواب آزمایشی $y_t=d\ ,\ x_t=c$ را در دستگاه فوق آزمایش می‌کنیم:

$$\begin{cases} 7c + 9d = 4 \\ -c + d = 0 \end{cases} \implies c = d = \tfrac{1}{4}$$

چنانچه این جواب شکست می‌خورد باید جواب آزمایشی از نوع $x_2=K_1t\ ,\ y_t=K_2t$ و در صورت شکست مجدد آنها از توان‌های بیشتر t استفاده نمائیم. تابع مکمل را بدست می‌آوریم.

جواب آزمایشی $y_t=nb^t\ ,\ x_t=mb^t$ را در معادله همگن شده صورت مسئله جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} (b+6)\, m + 9n = 0 \\ -m + bn = 0 \end{cases}$$

یک جواب برای دستگاه فوق $m=n=0$ است پس b را طوری انتخاب می‌کنیم که برای n,m جواب‌های غیرصفر داشته باشیم. به عبارت دیگر دترمینان ضرائب دستگاه فوق باید صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} b+6 & 9 \\ -1 & b \end{vmatrix} = b^2 + 6b + 9 = 0 \quad ==> \; b' = b'' = -3$$

معادله حاصل معادله کرکتریستیک دستگاه معادلات تفاضلی ما می‌باشد و b',b'' ریشه‌های کرکتریستیک آن می‌باشند. با جایگزینی $b'=b''=-3$ در یکی از معادلات فوق $m=-3n$ می‌شود.

اگر n را مساوی مقدار دلخواه c_1 قرار دهیم x_t برابر خواهد بود با:

$$x_t = -3c_1\,(-3)^t\,, \quad y_t = c_2\,(-3)^t$$

با توجه به مضاعف بودن ریشه‌های کرکتریستیک، توابع مکمل را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$x_c = -3c_1\,(-3)^t - 3c_2t(-3)^t$$
$$y_c = c_1(-3)^t + c_2t(-3)^t$$

که مقدار c_2 نیز یک ثابت دلخواه می‌باشد. جواب عمومی برابر مجموع توابع مکمل و جواب خاص خواهد بود:

$$x_t = -3c_1(-3)^t -3c_2t(-3)^t + ¼$$
$$y_c = c_1(-3)^t + c_2t(-3)^t + ¼$$

۱۲-۲-۲- استفاده از ماتریس‌ها

برای حل دستگاه معادلات تفاضلی خطی از چند قضیه مهم در جبر ماتریس‌ها می‌توان استفاده نمود. برای یادآوری چند نکته از جبر ماتریس‌ها را مرور می‌کنیم.

اگر در ماتریس $A=[a_{ij}]$ به ابعاد nxn ردیف iام و ستون jام را حذف کنیم دترمینان ماتریس حاصل را مینور ماتریس A می‌نامیم. بعبارت دیگر اگر $|A_{ij}|$ را مینور بنامیم داریم:

$$|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (۱۵۹)$$

کوفاکتور c_{ij} را با استفاده از مینور به شکل زیر می‌نویسیم:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ij}| \qquad (۱۶۰)$$

الحاق ماتریس یا adjoint آنرا به شکل زیر با استفاده از ترانسپوز ماتریس کوفاکتور می‌نویسیم:

$$Adj\ A= [c_{ij}]^T \quad (۱۶۱)$$

می‌توان نشان داد که:

$$A(adj) = (adj\ A)A= |A|I \quad (۱۶۲)$$

با استفاده از تعریف فوق واضح است که معکوس A برابر خواهد بود با:

$$A^{-1}= \frac{adj\ A}{|A|} \quad (۱۶۳)$$

حال به معادله (۱۵۷) توجه کنید اگر **K=0** باشد دستگاه معادلات مزبور همگن خواهد شد. تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{P}^*(E)= adj\ \mathbf{P}(E)\ , \quad \mathbf{y}_t = x^t\ \mathbf{P}^*(x) \quad (۱۶۴)$$

حال معادله (۱۵۷) را بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathbf{P}(E)\ x^t\ \mathbf{P}^*(x)= 0 \quad (۱۶۵)$$

قضیه زیر را در نظر بگیرید:

قضیه ۲۰

اگر x, k هر عدد دلخواهی باشند و P(E) یک پولی نومیال از مرتبه n از E باشد خواهیم داشت:

$$P(E)\ kx^t\ P(x) \quad (۱۶۶)$$

زیرا:

$$P(E)kx^t = (a_0E^n+a_1E^{n-1}+\ldots+a_{n-1}E+a_n)kx^t = ka_0x^{t+n}+ka_1x^{t+n-1}+\ldots+ka_{n-1}x^{t+1}+ka_nx^t$$
$$= kx^t(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n) = kx^t\ P(x)$$

پس عبارت (۱۶۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{P}(E)x^t\mathbf{P}^*(x)= x^t\mathbf{P}(x)\mathbf{P}^*(x)= 0 \quad (۱۶۷)$$

و با استفاده از (۱۶۲):

$$\mathbf{P}(E)x^t\mathbf{P}^*(x) = x^t\ \mathbf{I}\ |\mathbf{P}(x)|= 0 \quad (۱۶۸)$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$|\mathbf{P}(x)|= 0 \quad (۱۶۹)$$

به عبارت دیگر قضیه زیر ثابت شده است:

قضیه ۲۱

اگـر x_j یـک ریـشه از معادلـه دترمینـانی (۱۶۹) باشـد و $\mathbf{p_i}^*(x)$ یـک سـتون از $P^*(x)$ باشـد $y_t=x_j^t\mathbf{p_i}^*(x_j)$ یک جواب دستگاه معادله تفاضلی همگن زیر است:

$$\mathbf{P}(E)\mathbf{y_t}=\mathbf{0} \tag{۱۷۰}$$

قضیه ۲۲

اگر $x_1,\dots,x_n$ ریشه‌های معادله دترمینانی (۱۶۹) باشند و هیچکدام از آنها مضاعف نباشند

$$y_t=\sum_{j=1}^{w} v_j\, x_j^t\, \mathbf{p_i}^*(x_j) \tag{۱۷۱}$$

یک جواب دستگاه معادلات تفاضلی (۱۷۰) خواهد بود که v_j ثابت دلخواه می‌باشد.

زیرا اگر a یک مقدار ثابت باشد و y^*_t جواب (۱۷۰) باشد داریم:

$$\mathbf{P}(E)(y^*_t+y^{**}_t)=\mathbf{P}(E)\,y^*_t+\mathbf{P}(E)\,y_t^{**}=0+0=0$$

می‌توان نشان داد که (۱۷۱) جواب عمومی معادله تفاضلی همگن (۱۷۰) اسـت زیـرا ثابـت‌هـای دلخواه آن بـه تعـداد شـرایط اولیـه مـی‌باشـد. حـال مجـدداً بـه حـل دسـتگاه معـادلات تفاضـلی غیرهمگن (۱۵۷) بپردازیم:

قضیه ۲۳

جواب عمومی دستگاه معادلات (۱۵۷) برابر است با حاصل جمـع خـاص آن و جـواب عمـومی دستگاه معادلات همگن شده (۱۷۰).

زیرا اگر x_t جواب عمومی (۱۷۰) باشد داریم:

$$\mathbf{P}(E)x_t=0$$

و فرض کنید z_t جواب خاص (۱۵۷) باشد بنابراین:

$$\mathbf{P}(E)z_t=-k$$

واضح است که (x_t+z_t) در معادله (۱۵۷) صدق می‌کند:

$$\mathbf{P}(E)(x_t+z_t)+k=\mathbf{P}(E)x_t+\mathbf{P}(E)x_t+k=0-k+k=0$$

پس برای بدست آوردن جواب عمومی احتیاج به جواب خاص و تابع مکمل داریم. تابع مکمل معادلات خلاصه شده همگن را با استفاده از قضایای ۲۱ و ۲۲ می‌توان بدست آورد. اگر **k** یک بردار ثابت باشد حصول جواب خاص خیلی ساده می‌شود. به بسط زیر توجه کنید:

$$P(E)b=a_1E^n\,b+a_2E^{n-1}\,b+\dots+a_nb=a_1b+a_2b+\dots+a_nb=P(1)\,b$$

که b یک مقدار ثابت است. حال به معادله (۱۵۷) برمی‌گردیم. اگر بجای بردار $\mathbf{y_t}$ بـردار ثابـت **b** را جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$\mathbf{P}(E)\,\mathbf{b}+\mathbf{k} = \mathbf{P}(1)\,\mathbf{b}+\mathbf{k}= 0 \qquad (۱۷۲)$$

این دستگاه را براحتی می‌توان برای بردار **b** حل نمود. زیرا $p_{ij}(1)$ همگی اعداد ثابت هستند. پس **b** برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{b}= -\mathbf{P}^{-1}(1)\,\mathbf{k} \qquad (۱۷۳)$$

بدین ترتیب جواب عمومی برابر خواهد بود با:

$$y_t= \sum_{j=1}^{w} v_j\, x_j^t\, \mathbf{P}^*_{\mathbf{i}}(x_j) + b \qquad (۱۷۴)$$

مثال ۱۲-۶

دستگاه معادلات تفاضلی زیر را با شرایط اولیه $y_{10}=1$, $y_{20}=1$ حل کنید:

$$y_{1,t+2} - 2y_{1,t+1} + y_{1,t} + y_{2,t+1} + 5y_{2,t} + 5= 0$$
$$y_{1,t+1} - 2y_{1,t} + 2y_{2,t}+ 7= 0$$

دستگاه همگن شده فوق را با استفاده از اپراتور E می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} E^2 - 2E+1 & E+5 \\ E-2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله دترمینانی (۱۶۹) را می‌نویسیم:

$$|\mathbf{P}(x)| = \begin{bmatrix} x^2 - 2x+1 & x+5 \\ x-2 & 2 \end{bmatrix} = 0 \quad ==> \quad x^2 - 7x+ 12= 0 ==> \quad x'=3 \;,\; x''= 4$$

ماتریس الحاقی $\mathbf{P}(E)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{P}^*(E) = \begin{bmatrix} 2 & -(E+5) \\ -(E-2) & E^2 - 2E+1 \end{bmatrix}$$

پس:

$$\mathbf{P}^*(x') = \mathbf{P}^*(3) = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^*(x'') = \mathbf{P}^*(4) = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیه ۲۲:

$$\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} = v_1 3^t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + v_2 4^t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

که بطور دلخواه ستون‌های اول ماتریس‌های الحاقی را انتخاب کرده‌ایم. این موضوع باعث ایجاد اشکالی نمی‌شود زیرا ۷۱ و ۷۲ مقادیر دلخواه می‌باشند. برای یافتن جواب خاص مقادیر b_2 و b_1 را با استفاده از (۱۷۲) و (۱۷۳) به شکل زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} E^2 - 2E+1 & E+5 \\ E-2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

چون $\mathbf{P}(E)b = b\mathbf{P}(1)$ قرار می‌دهیم $E=1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad ==> \quad b_1 = \frac{32}{6}\ ,\ b_2 = -\frac{5}{6}$$

با استفاده از (۱۷۴) جواب عمومی برابر خواهد بود با:

$$y_{1,t} = 2v_1 3^t + 2v_2 4^t + \frac{32}{6}$$

$$y_{2,t} = -v_1 3^t - 2v_2 4^t - \frac{5}{6}$$

با قراردادن $t=0$ و $y_{2,0}=y_{1,0}=1$ در معادلات فوق و با حل بـرای v_1 , v_2 خـواهیم داشـت $v_1=-\frac{1}{3}$, $v_2=2.5$. جواب نهائی عبارت خواهد بود از:

$$y_{1,t} = -5(3)^t + \frac{2}{3}(4)^t + \frac{32}{6}$$

$$y_{2,t} = 2.5(3)^t - \frac{2}{3}(4)^t - \frac{5}{6}$$

۱۲-۳- بحث در دستگاه معادلات تفاضلی خطی

در قسمت‌های قبل گفتیم که هر دستگاه معادلات تفاضلی خطی را می‌توان به یک دستگاه تفاضلی خطی با مرتبه یک تبدیل نمود. به طور کلی این دستگاه معادلات را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} y_{1,t+1} &= a_{11} y_{1,t} + a_{12} y_{2,t} + \ldots + a_{1n} y_{n,t} + k_1 \\ y_{2,t+1} &= a_{21} y_{1,t} + a_{22} y_{2,t} + \ldots + a_{2n} y_{n,t} + k_2 \\ &\vdots \\ y_{n,t+1} &= a_{n1} y_{1,t} + a_{n2} y_{2,t} + \ldots + a_{nn} y_{n,t} + k_n \end{aligned} \qquad (۱۷۵)$$

از سمت چپ و راست معادلات دستگاه (۱۷۵) به ترتیب مقادیر $y_{1,t+1}$, $y_{2,t+1}$,…, $y_{n,t+1}$ را کم می‌کنیم. حاصل برابر خواهد شد با:

$$\begin{aligned} a_{11} y_{1,t} - y_{1,t+1} + a_{12} y_{2,t} + \ldots + a_{1n} y_{n,t} + k_1 &= 0 \\ a_{21} y_{1,t} + a_{22} y_{2,t} - y_{2,t+1} + \ldots + a_{2n} y_{n,t} + k_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1} y_{1,t} + a_{n2} y_{2,t} + \ldots + a_{nn} y_{n,t} - y_{n,t+1} + k_n &= 0 \end{aligned} \qquad (۱۷۶)$$

با استفاده از (۱۷۶) و (۱۶۹) بوضوح پیداست که معادله دترمینانی (کرکتریستیک) دستگاه

(۱۷۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|\mathbf{A}(x)|=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}=0 \qquad (۱۷۷)$$

فرم بسط یافته دترمینان فوق به صورت یک پولی‌نومیال برحسب x و به شکل زیر خواهد بود:

$$x^n + R_1x^{n-1} +\ldots+R_{n-1}x + R_n = 0$$

قضیه ۲۴

در معادلـه پـولی نومیـال (۱۷۸) مقـدار R_1 (ضـریب x^{n-1}) برابـر مجمـوع ریـشه‌هـای پولی‌نومیال ضرب در ۱- می‌باشد. مقدار R_n (جمله ثابت) در (۱۷۸) برابر حاصل ضرب ریشه‌ها ضرب در $(-1)^n$ می‌باشد. (این قضیه تعمیم قضیه ۸ است).

اثبات: اگر ریشه‌های معادله کرکتریستیک را $x_1,x_2,\ldots,x_n$ بنامیم قضیه عامل جبر بیـان مـی‌کنـد که:

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x- x_n) = x^n + R_1x^{n-1} +\ldots+ R_{n-1}\, x+R_n = 0$$

با ضرب مقادیر سمت چپ و دسته‌بندی آنها خواهیم داشت:

$$x^n-(x_1+x_2+\ldots+x_n)\, x^{n-1}+\ldots+(-x_1)(-x_2)\ldots(-x_n)= x^n+R_1x^{n-1}+\ldots+R_n= 0$$

پس می‌توان نوشت:

$$R_1= -(x_1+x_2+\ldots+x_n),\ R_n= (-1)^n(x_1x_2\ldots x_n) \qquad (۱۷۹)$$

قضیه ۲۵

مقدار R_1 در معادلـه (۱۷۸) برابـر اسـت بـا منهـای مجمـوع عناصـر قطـر اصـلی (trace) دترمینان $|\mathbf{A}(0)|$ در (۱۷۷) که در آن x=0 است. به عبارت دیگر:

$$R_1= -(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}) \qquad (۱۸۰)$$

و همچنین R_n در معادله (۱۷۸) برابر است با $(-1)^n$ ضرب در دترمینان $|\mathbf{A}(0)|$. به عبارت دیگر:

$$R_n= (-1)^n\, |\mathbf{A}(0)| \qquad (۱۸۱)$$

برای سهولت اثبات حالت n=2 را ثابت می‌کنیم. می‌دانیم که طبق قضیه‌ای در جبـر مـاتریس‌هـا اگر یک دترمینان ستون‌هایش (یا ردیف‌هایش) مرکب از مجموع دو جمله باشد آن دترمینان را می‌توان برحسب دو دترمینان مجزا نوشت. به عبارت دیگر:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

با استفاده از این قضیه دترمینان زیر را بسط می‌دهیم:

$$|\mathbf{A}(0)| = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}-x \end{vmatrix} = 0$$

$$|\mathbf{A}(0)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & a_{12}+0 \\ 0 & a_{22}-x \end{vmatrix} = 0$$

$$|\mathbf{A}(0)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & -x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = 0$$

$$|\mathbf{A}(0)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{11}x - a_{22}x + x^2 = 0$$

$$|\mathbf{A}(0)| = x^2 - (a_{11}x + a_{22}x) + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

که براحتی R_1 , R_n را می‌توان در این حالت طبق (۱۸۰) و (۱۸۱) مشاهده نمود. برای حالت کلی n نیز می‌توان از همین روش قضیه را اثبات کرد. بنابر قضایای فوق می‌توان نتیجه گرفت:

قضیه ۲۶

مجموع ریشه‌های کرکتریستیک دستگاه معادلات تفاضلی مرتبهٔ اول همگن (۱۷۵) برابر trace ماتریس کرکتریستیک دستگاه با (x=0) است و حاصل ضرب ریشه‌های آن مساوی دترمینان دستگاه در (x=0) می‌باشد.

قبل از اینکه به بحث در مورد ثبات پویای تعادل بپردازیم چند موضوع را در مورد ریشه‌های مختلط یادآور می‌شویم:

ریشه‌های مختلط پولی‌نومیال به شکل مزدوج‌های c+di , c-di ظاهر می‌شوند. $i=\sqrt{-1}$.

مجوع دو ریشه مزدوج مختلط برابر است با $c+di + c-di = 2c$

ضرب دو ریشه مزدوج مختلط برابر است با $(c+di)(c-di)= c^2+d^2 \geq 0$

مدول یا قدرمطلق ریشه‌های مزدوج برابر است با $|c+di|=\sqrt{c^2+d^2}$

اگر قدرمطلق دو ریشه مزدوج مختلط کمتر از یک باشد برای قدرمطلق و مجموع آنان داریم:

$c^2+d^2 <1$, $2c<2$

حال فرض کنید معادله ما دارای R ریشه حقیقی و 2K ریشه مختلط می‌باشد که به صورت مزدوج مشاهده خواهند شد. اگر قدرمطلق هر کدام از R ریشه حقیقی کمتر از یک باشند مجموع قدرمطلق آنان نیز از یک کمتر خواهد بود. و با استفاده از موضوع ذکر شده در ۵ بالا اگر قدرمطلق هرکدام از ریشه‌های مختلط کمتر از یک باشد مجموع قدرمطلق آنان کمتر از 2K خواهد بود. به عبارت دیگر مجموع قدرمطلق تمام ریشه‌ها باید کمتر از R+2k باشد.

قضیه ۲۷

اگر دستگاه (۱۷۵) با ثبات باشد قدرمطلق trace ماتریس $\mathbf{A}(0)$ کمتر از n است. بعبارت دیگر:

$$\mathrm{Tr}\,|\mathbf{A}(0)|<n \qquad (۱۸۲)$$

قضیه ۲۸

اگر دستگاه (۱۷۶) باثبات باشد قدرمطلق دترمینان کرکتریستیک $\mathbf{A}(0)$ کمتر از یک است.

$$\mathrm{Abs}|\mathbf{A}(0)|<1 \qquad (۱۸۳)$$

اثبات دو قضیه فوق واضح است و به عهده خواننده گذاشته می‌شود. فقط یادآوری می‌کنیم که شرط باثبات بودن این است که قدرمطلق کلیه ریشه‌های پولی‌نومیال کرکتریستیک باید کمتر از یک باشد.

قضیه دیگری راجع به ثبات نیز می‌توان بیان نمود که کاربردهای خاص خود را دارد. قبل از همه توجه کنید که $(-x)^n$ جمله با بالاترین درجه در پولی نومیال کرکتریستیک $|\mathbf{A}(x)|$ می‌باشد. اگر x به سمت بینهایت برود تمام جملات در مقایسه با $(-x^n)$ کوچک خواهند شد و بنابراین مقدار دترمینان باید هم‌علامت $(-x^n)$ شود. بنابراین مقدار دترمینان دارای علامت $(-x^n)$ خواهد بود. اگر n زوج باشد مثبت و اگر n فرد باشد منفی خواهد بود. همینطور اگر x به سمت منهای بینهایت میل کند دترمینان مزبور هم‌علامت $(-x^n)$ خواهد بود اما $(-x^n)$ باید همیشه مثبت باشد زیرا x منفی است. حال اگر دستگاه باثبات است معادله کرکتریستیک آن نباید ریشه‌ای با قدرمطلق بزرگتر از یک داشته باشد. بنابراین دترمینان کرکتریستیک نمی‌تواند بین یک و بینهایت یا بین منهای یک و منهای بینهایت تغییر علامت دهد. پس در $x=1$ باید همان علامتی را داشته باشد که در $x=\infty$ دارد و همچنین در $x=-1$ باید علامت در $x=-\infty$ را داشته باشد. به عبارت دیگر:

قضیه ۲۹

اگر سیستم (۱۷۶) باثبات باشد برای دترمینان زیر در x=1 برحسب زوج یا فرد بودن n باید داشته باشیم:

$$|\mathbf{A}(1)| = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{matrix} \tag{۱۸۴}$$

همچنین برای x=-1

$$|\mathbf{A}(-1)| = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} > 0 \tag{۱۸۵}$$

نکته قابل توجه در مورد قضایای ۲۷ و ۲۸ و ۲۹ این است که آنان شرط لازم برای ثبات را طرح می‌نمایند نه شرط لازم کافی را. بدین ترتیب اگر دستگاه مورد نظر هرکدام از آزمون‌های قضایای فوق را نتوانست برآورده کند بی‌ثبات است. ولی نمی‌توانیم مطمئن باشیم که دستگاهی که آزمون‌های مزبور را برآورده می‌کند حتماً باثبات است. در این حالت باید دترمینان‌های شِر که در فصل معادلات تفاضلی مرتبه nام بحث شد یکی یکی محاسبه شوند.

قضیه دیگری در مورد ثبات می‌توان ذکر کرد. از آنجا که مجموع و حاصل ضرب چند عدد مثبت، مثبت می‌باشد با کمک قضیه ۲۶ می‌توان گفت:

قضیه ۳۰

اگر trace یا دترمینان دستگاه منفی یا صفر باشد دستگاه مورد نظر باید ریشه یا ریشه‌های منفی و یا مختلط داشته باشد. این قضیه بدین معنی است که چنین دستگاهی دارای نوسان خواهد بود.

۱۲-۳-۱- دستگاه‌های مرتبه اول با ضرائب غیرمنفی

دستگاه معادلات همگن مرتبه اول را با استفاده از ماتریس‌ها می‌توان به شکل زیر نوشت. این تلخیص با استفاده از دستگاه (۱۵۷) ولی همگن شده آن بدست می‌آید:

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_t , \qquad \mathbf{y}_0 = \mathbf{c}_0 \quad \text{شرایط اولیه} \tag{۱۸۶}$$

که y_t , y_{t+1} , y_0 , c_0 بردارهائی به ابعاد nx1 و A ماتریسی به ابعاد nxn می‌باشند. دستگاه (۱۸۶) را به راحتی می‌توان حل نمود. زیرا: $y_1=Ay_0$, $y_2=Ay_1=A^2y_0$,…, $y_t=A^ty_0$

با جایگزینی شرایط اولیه:

$$y_t= A^tc_0 \qquad (۱۸۷)$$

حال فرض کنید ضرائب دستگاه (۱۸۶) غیرمنفی باشند. با این حساب نُرم‌های هر ستون ماتریس A را مجموع عناصر آن ستون مدنظر می‌گیریم و نرم ماتریس A را بزرگترین مجموع ستون‌ها در نظر می‌گیریم. پس:

قضیه ۳۱

اگر تمام عناصر ماتریس A غیرمنفی باشند اگر نرم A کمتر یا مساوی یک باشد دستگاه (۱۸۶) نمی‌تواند غیرمیرا و واگرا باشد زیرا قدرمطلق بزرگترین ریشه نمی‌تواند بزرگتر از یک باشد. اگر نرم A کوچکتر از یک باشد دستگاه مزبور باید باثبات باشد.

این قضیه برخلاف قضایای قبلی یک شرط کافی برای ثبات را بیان می‌نماید تا یک شرط لازم. برای اثبات می‌توان بطور خلاصه موارد زیر را عنوان نمود. (همچنین نگاه کنید به (Baumol (1970), Bidabad, Bidabad (1990).

۱- چون تمام عناصر ماتریس A غیرمنفی هستند پس تمام عناصر $A^2=A*A$ و...و $A^t=AA^{t+1}$ نیز غیرمنفی خواهند بود.

۲- اگر دستگاه (۱۸۶) واگرا باشد بدین معنی است که عناصری از ماتریس A باید بزرگتر از یک باشند تا عناصری از A^t به سمت بی‌نهایت میل کنند.

۳- اگر دستگاه باثبات باشد y_t به سمت تعادل خودش (صفر) همگرا است و هرکدام از عناصر A^t باید به سمت صفر میل کنند.

۴- اگر دستگاه بی‌ثبات و واگرا باشد با افزایش t عناصر A^t نیز افزایش خواهند یافت و بدین معنی است که بعضی از عناصر A باید بیش از یک باشند. بنابراین نرم A^t باید بیش از یک باشد.

۵- از طرف دیگر اگر نرم A^t به سمت صفر میل نماید، تمام عناصر A^t نیز باید به سمت صفر میل نمایند.

۶- اگر نرم دو ماتریس A و A^{t-1} کمتر یا مساوی یک باشند نرم حاصل ضرب آنها A^t باید

کمتر یا مساوی یک باشد و نرم $\mathbf{A}^t$ کمتر یا مساوی حاصل ضرب نرم‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}^{t-1}$ خواهد بود.

۷- اگر نرم $\mathbf{A}$ مساوی r و کوچکتر از یک است نرم $\mathbf{A}^t$ کوچکتر یا مساوی r^t خواهد بود.

۱۲-۴- معادلات تفاضلی برداری

در این قسمت سعی ما بر این است که با استفاده از ماتریس‌ها بطور تکنیکی‌تر دستگاه معادلات تفاضلی را بررسی نمائیم. خوانندگانی که به جبر ماتریس‌ها تسلط ندارند می‌توانند این قسمت را حذف نمایند. برای توضیح در این قسمت رجوع کنید که به Dhrymes (1974).

دستگاه معادلات تفاضلی خطی با ضرائب ثابت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم. اگر:

$$|\mathbf{A}_0| \neq 0 \qquad (۱۸۸)$$

پس تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{A_0 y_t} + \mathbf{A_1 y_{t-1}} + \mathbf{A_2 y_{t-2}} + \ldots + \mathbf{A_n y_{t-n}} = \mathbf{g}(t) \qquad (۱۸۹)$$

که $\mathbf{A}_i$, $i=1,\ldots,n$ ماتریس‌های ضرائب ثابت mxm و $\mathbf{y}_t$ و $\mathbf{g}(t)$ بردارهای ستونی mx1 می‌باشند.

دستگاه فوق معادله تفاضلی برداری مرتبه n نیز نامیده می‌شود.

۱۲-۴-۱- معادلات تفاضلی برداری مرتبه اول

هر معادله تفاضلی برداری را همانطور که در قبل دیدیم می‌توان به یک دستگاه معادلات مرتبه اول با ضرائب ثابت تبدیل نمود. فرض کنید که $\mathbf{A}_0=\mathbf{I}$ است. این فرض از عمومی بدون مسئله نمی‌کاهد. تعریف می‌کنیم: $\mathbf{x}_t = (\mathbf{y}^T_t, \mathbf{y}^T_{t-1}, \ldots, \mathbf{y}^T_{t-n+1})^T$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \cdots & -\mathbf{A}_{n-1} & -\mathbf{A}_n \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (۱۹۰)$$

معادله همگن شده (۱۸۹) را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^* \mathbf{x}_{t-1} \qquad (۱۹۱)$$

معادله (۱۸۹) بطورکلی می‌تواند به این شکل تعریف شود.

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^* \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{e.1} \otimes \mathbf{g}(t) \qquad (۱۹۲)$$

که $\mathbf{e.1}$ بردار ستونی n عضوی است که همه عناصر آن بجز اولی صفر است و عنصر اول آن

یک می‌باشد و $\otimes$ ضرب کرانکر می‌باشد. حال برمی‌گردیم به بررسی معادله تفاضلی برداری:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{g}(t) \qquad (۱۹۳)$$

که $\mathbf{A}$ ماتریس mxm ضرائب ثابت و $\mathbf{y}_t$, $\mathbf{y}_{t-1}$, $\mathbf{g}(t)$ بردارهای ستونی mx1 می‌باشند. فرض کنید ماتریس $\mathbf{A}$ قابل قطری شدن باشد جواب (۱۹۳) برداری چون $\mathbf{x}_t$ است که در (۱۹۳) و شرایط اولیه $\mathbf{y}_0 = \overline{\mathbf{y}_0}$ صدق نماید. همانند قبل مسئله را به دو قسمت تابع مکمل و جواب خاص تقسیم می‌کنیم. برای بدست آوردن تابع مکمل دستگاه همگن زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} \qquad (۱۹۴)$$

جواب آزمایشی زیر را مورد استفاده قرار می‌دهیم: $\mathbf{y}_t = \mathbf{c}k^t$

که $\mathbf{c}$ یک بردار m عضو ستونی و k یک اسکالر می‌باشد. این جواب را در (۱۹۴) جایگزین می‌کنیم: $(k\mathbf{I}-\mathbf{A})\,\mathbf{c}k^{t-1} = 0$

چون k=0 جواب مبتذل $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ را تولید می‌کند پس: $(k\mathbf{I}-\mathbf{A})\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$

دستگاه همگن فوق بر این شرط جواب غیرمبتذل دارد که: $|k\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \mathbf{0}$

این شرط معادله کرکتریستیک معادله تفاضلی برداری را تشکیل می‌دهد.

اگر $\{(k_i, \mathbf{c}_{.i}); i=1,\ldots,m\}$ را بردارها و ریشه‌های کرکتریستیک تعریف می‌کنیم، تابع مکمل برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{y}_c = \sum_{i=1}^{m} d_i\, \mathbf{c}_{.i}\, k_i^t \qquad (۱۹۵)$$

که d_i، i=1,…,m مقادیر دلخواه هستند که باید با شرایط اولیه مشخص شوند. اگر

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_{.1}, \mathbf{c}_{.2}, \ldots, \mathbf{c}_{.m}), \quad \mathbf{K} = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_m), \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

(۱۹۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت: $\mathbf{y}_c = \mathbf{c}\mathbf{K}^t\mathbf{d}$

که با شرط اولیه $\mathbf{y}_0 = \overline{\mathbf{y}_0}$ عناصر باید طوری انتخاب شوند که: $\overline{\mathbf{y}_0} = \mathbf{c}\mathbf{K}^0\mathbf{d} = \mathbf{c}\mathbf{d}$

از آنجائیکه $\mathbf{A}$ قابل قطری شدن است $\mathbf{c}$ غیرمفرد است پس: $\mathbf{d} = \mathbf{c}^{-1}\overline{\mathbf{y}_0}$

و نهایتاً (۱۹۶) برابر خواهد بود با : $\mathbf{y}_c = \mathbf{c}\mathbf{K}^t\mathbf{c}^{-1}\,\overline{\mathbf{y}_0}$

حال به محاسبه جواب خاص می‌پرازیم. با استفاده از اپراتور L (۱۹۳) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{AL})\,\mathbf{y}_t = \mathbf{g}(t) \quad ==> \quad \mathbf{y}_t = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{AL})^{-1}\,\mathbf{g}(t)$

با استفاده از ایزومورفیسم می‌توانیم معکوس فوق را برای یک متغیر Q حقیقی یا مختلط نامعلوم از **I-AQ** بدست آوریم. برای این کار ماتریس الحاقی (adjoint) **I-AQ** (ترانسپوز ماتریس کوفاکتورها) را می‌نویسیم. از آنجائی که هر کوفاکتور دترمینان یک ماتریس (m-1)x(m-1) می‌باشد ماتریس الحاقی ماتریسی است شبیه: $\mathbf{B}(Q) = [bij(Q)]$

عناصر bij(Q) پولی‌نومیال‌هائی از درجه حداکثر m-1 برحسب Q می‌باشند. همچنین احتیاج داریم که دترمینان **I-AQ** را بدست آوریم. برای $k = Q^{-1}$ می‌توان نوشت:

$$|\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}Q| = |Q(k\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A})| = Q^m|\,k\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}| = Q^m\prod_{i=1}^{m}(k-k_i) = Q^m k^m\prod_{i=1}^{m}(1-Qk_i) = \prod_{i=1}^{m}(1-Qk_i)$$

بنابراین:
$$a(L) = |\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}L| = \prod_{i=1}^{m}(\mathbf{I}\text{-}k_iL)$$

اگر دستگاه (۱۹۳) با ثبات باشد: $|k_i| < 1 \quad i = 1, \ldots, m$

پس معکوس **I-AL**. بخوبی به شکل زیر تعریف می‌شود:
$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}L)^{-1} = \left[\frac{bij(L)}{a(L)}\right]$$

بنابراین هر عضو نسبت دو پولی‌نومیال است. صورت حداکثر از درجه m-1 و مخرج از درجه m می‌باشند. جواب عمومی (نهائی) معادله تفاضلی برداری با شرایط اولیه $\overline{\mathbf{y}_0}$ برابر خواهد بود:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c}\mathbf{K}^t\mathbf{c}^{-1}\,\overline{\mathbf{y}_0} + (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A}L)^{-1}\,[(1-d_{0t})\mathbf{g}(t)] \qquad (۱۹۷)$$

که d_{0t} دلتای کرانکر می‌باشد که به این شکل تعریف می‌شود:
$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

۱۲-۴-۲- معادلات تفاضلی برداری مرتبه n

حال مجدداً به معادله تفاضلی برداری (۱۸۹) برمی‌گردیم. این معادله کاربرد زیادی در مسائل اقتصاد سنجی دارد زیرا شکل عمومی معادلات ساختاری الگوهای اقتصاد سنجی پویا همانند آن تعریف می‌شوند. برای حل این دستگاه دقیقاً روشی را که برای حل معادلات تفاضلی مرتبه nام خطی معمولی بکار بردیم دنبال خواهیم کرد. برای سهولت دستگاه (۱۸۹) را با همان تعاریف قبلی به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{y}_t + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t+1} + \ldots + \mathbf{A}_n\mathbf{y}_{t+n} = \mathbf{g}(t) \qquad (۱۹۸)$$

برای بدست آوردن تابع مکمل (۱۹۸) را همگن نموده:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{y}_t+\mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t+1}+\ldots+\mathbf{A}_n\mathbf{y}_{t+n}=\mathbf{0} \qquad (۱۹۹)$$

جواب آزمایشی زیر را بکار می‌بریم.

$$\mathbf{y}_t=\mathbf{c}\,k^t \qquad (۲۰۰)$$

که $\mathbf{c}$ یک بردار ستونی m عضوی و k یک اسکالر می‌باشد. رابطه (۲۰۰) را در (۱۹۹) جایگزین و طرفین را بر k^t تقسیم می‌کنیم. $k=0$ جواب مبتذلی برای (۲۰۰) تولید خواهد کرد پس:

$$(\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1k+\mathbf{A}_2k^2+\ldots+\mathbf{A}_nk^n)\,\mathbf{c}=0 \qquad (۲۰۱)$$

این دستگاه دارای جواب غیرمبتذل برای $\mathbf{c}$ خواهد بود اگر و فقط اگر ماتریس داخل پرانتز مفرد باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$|\,\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1k+\mathbf{A}_2k^2+\ldots+\mathbf{A}_nk^n|=0 \qquad (۲۰۲)$$

پولی‌نومیال فوق حداکثر از درجه mn خواهد بود و اگر $|\mathbf{A}_0|\neq 0$ باشد $k=0$ جواب آن نیست. فرض کنید ریشه‌های (۲۰۲) متمایز می‌باشند. آنها را به ترتیب مقدارشان شماره‌گذاری می‌کنیم. برای هر ریشه k_i , $i=1,\ldots,mn$ یک بردار $\mathbf{c}_{.i}$ برای (۲۰۱) خواهیم داشت. بدین ترتیب با استفاده از (۲۰۰) خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}^i_t=\mathbf{c}_{.i}\,k^t_i \qquad i=1,\ldots,mn \qquad (۲۰۳)$$

که (۲۰۳) یک جواب (۱۹۹) می‌باشد. با جایگزینی (۲۰۳) در (۱۹۹) خواهیم داشت:

$$(\mathbf{A}_0\mathbf{c}_{.i}+\mathbf{A}_1\mathbf{c}_{.i}k_i+\mathbf{A}_2\mathbf{c}_{.i}k^2_i+\ldots+\mathbf{A}_n\mathbf{c}_{.i}k^n_i)\,k^t_i=\mathbf{F}(k_i,\mathbf{c}_{.i}) \qquad (۲۰۴)$$

از آنجائی که $|k_i|\neq 0$ است $\mathbf{F}(k_i,\mathbf{c}_{.i})$ وقتی برابر صفر خواهد بودکه پرانتز سمت چپ صفر باشد. ولی چون $\mathbf{c}_{.i}$, k_i طوری انتخاب شدند که جواب (۲۱) باشند پس:

$$\mathbf{F}(k_i,\mathbf{c}_{.i})=0 \qquad (۲۰۵)$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{y}^i_t$ یک جواب دستگاه (۱۹۹) می‌باشد. اگر d_i را ثابت دلخواه در نظر بگیریم تابع مکمل را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{y}_t=\sum_{i=1}^{mn} d_i\mathbf{c}_{.i}k^t_i \qquad (۲۰۶)$$

مقادیر d_i را باید بوسیله شرایط اولیه تعیین نمود. برای مثال اینکه چگونه می‌توان این کار را کرد فرض کنید که شرایط اولیه $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{n-1}$ داده شده‌اند بنابراین با استفاده از (۲۰۶) داریم:

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^{mn} d_i \mathbf{c}_{\cdot i}$$
$$\mathbf{y}_1 = \sum_{i=1}^{mn} d_i \mathbf{c}_{\cdot i}\, k_i$$
$$\vdots \qquad (۲۰۷)$$
$$\mathbf{y}_{n-1} = \sum_{i=1}^{mn} d_i \mathbf{c}_{\cdot i}\, k_i^{n-1}$$

ماتریس **C** را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\cdot 1} & \mathbf{c}_{\cdot 2} & \cdots & \mathbf{c}_{\cdot mn} \\ \mathbf{c}_{\cdot 1} k_1 & \mathbf{c}_{\cdot 2} k_2 & \cdots & \mathbf{c}_{\cdot mn} k_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_{\cdot 1} k_1^{n-1} & \mathbf{c}_{\cdot 2} k_2^{n-1} & \cdots & \mathbf{c}_{\cdot mn} k_{mn}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (۲۰۸)$$

دستگاه (۲۰۷) را می‌توان بر اساس (۲۰۸) به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{d} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{mn} \end{bmatrix} \qquad (۲۰۹)$$

بنابراین اگر **C** غیرمفرد باشد ($|\mathbf{C}| \neq 0$) بردار **d** برابرخواهد بود با:

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y} \qquad (۲۱۰)$$

اگر (۲۰۲) ریشه‌های مضاعف باشد یا به عبارت دیگر اگر r ریشه مساوی k^* داشته باشد و اگر بردار مرتبط با k^*، $\mathbf{c}^*$ است جواب‌های مرتبط با k^* برابر خواهند بود با:

$$\mathbf{c}^* k^{*t},\ \mathbf{c}^* t k^{*t}, \ldots,\ c^* t^{r-1} k^{*t} \qquad (۲۱۱)$$

برای یافتن جواب خاص (۱۹۸) را به شکل زیر می‌نویسیم: $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 E + \ldots + \mathbf{A}_n E^n)\, \mathbf{y}_t = \mathbf{g}(t)$

به عبارت دیگر جواب خاص جوابی است که: $\mathbf{y}_t = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 E + \ldots + \mathbf{A}_n E^n)^{-1} \mathbf{g}(t)$

جواب عمومی بدین ترتیب برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{y}_t = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 E + \ldots + \mathbf{A}_n E^n)^{-1} [1 - \delta_{0t} - \delta_{1t} - \ldots - \delta_{n-1,t}]\mathbf{g}(t) + \sum_{i=1}^{mn} d_i \mathbf{c}_{\cdot i} k_i^t \qquad (۲۱۲)$$

تمرین ۱۶

دستگاه‌های معادلات زیر را حل کنید:

۱- $\begin{cases} 2u_{t+1} + v_{t+1} = u_t + 3v_t \\ u_{t+1} + v_{t+1} = u_t + v_t \end{cases}$

۲- $\begin{cases} y_{t+1} - tz_t = 0 \\ z_{t+1} - 4ty_t = 0 \end{cases}$

۳- $\begin{cases} u_{t+1} = pu_t + qv_t \\ v_{t+1} = (1-p)u_t + (1-q)v_t \end{cases}$ $\quad 1-p+q \neq 0$

۴- مسئله ۳ را با شرط $1-p+q=0$ حل کنید.

۵- $\begin{cases} 2u_{t+1} + v_{t=2} = 16v_t \\ u_{t+2} - 2v_{t+1} = 4u_t \end{cases}$

۶- با استفاده از قضایای ۲۷ تا ۳۱ ثبات پویای تعادل را در دستگاه معادلات زیر بحث کنید.

-1 $\begin{cases} y_{1,t+1} = -2y_{1,t} + y_{2,t} \\ y_{2,t+1} = 1.5y_{1,t} - y_{1,t} \end{cases}$

-2 $\begin{cases} y_{1,t+1} = 0.9y_{1,t} - 0.8y_{2,t} \\ y_{2,t+1} = 0.8y_{1,t} + 0.9y_{2,t} \end{cases}$

-3 $\begin{cases} y_{1,t+1} = y_{1,t} + \dfrac{1}{2} y_{2,t} \\ y_{2,t+1} = \dfrac{1}{2} y_{1,t} + y_{2,t} \end{cases}$

۱۳- معادلات تفاضلی جزئی

تابحال معادلات تفاضلیی را که بررسی نمودیم تابع یک متغیر t بودند. اینگونه معادلات به معادلات تفاضلی معمولی موسوم هستند. وقتی تعداد متغیرها بیش از یک باشد معادلات مورد نظر معادلات تفاضلی جزئی نامیده می‌شوند. بطور مثال معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$z_{t+2,m} - 3\, z_{t+1,\, m+1} + 2z_{t,m+2} = 0$$

که یک معادله تفاضلی جزئی است که تابع دو متغیر m,t می‌باشد. برای بررسی چنین معادلاتی باید مفهوم اپراتور تفاضل را مجدداً تعریف کنیم. در حالتی که بیش از یک متغیر گسسته در معادله وجود دارد باید اپراتور تفاضلی جزئی را همانند مشتق‌های جزئی تعریف کنیم. اپراتور تفاضل جزئی را به این شکل تعریف می‌کنیم. اگر m,t دو متغیر گسسته (مثلاً زمان و مکان) باشند تفاضل تابع f نسبت به t برابر خواهد بود با:

$$\Delta_1 f(t,m)= f(t+1,m)- f(t,m) \qquad (۲۱۳)$$

و همچنین تفاضل جزئی تابع f نسبت به m برابر است با:

$$\Delta_2 f(t,m)= f(t,m+1)- f(t,m) \qquad (۲۱۴)$$

که Δ_1 و Δ_2 اپراتورهای تفاضلی جزئی نامیده می‌شوند. اپراتور جزئی E را نیز با همین شباهت می‌توان تعریف نمود.

$$E_1= 1+ \Delta_1 \ , E_2= 1+ \Delta_2 \qquad (۲۱۵)$$

توان‌های E_i , Δ_i نیز به همین شکل تعریف می‌شوند. با استفاده از تعاریف فوق مثال اول این فصل را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(E^2_1 - 3E_1E_2 + 2E^2_2)\, z_{t,m}= 0$$

همانند معادلات تفاضلی معمول هر تابعی که معادله تفاضلی جزئی را برقرار نماید جواب است. معادله تفاضلی خطی جزئی عمومی را که از دو متغیر تشکیل شده باشد می‌توان به شکل زیر تعریف نمود:

$$\varphi(E_1 , E_2)\, z_{t,m} = f(t,m)$$

که $\varphi(E_1,E_2)$ یک پولی‌نومیال برحسب E_1 , E_2 و از درجه n می‌باشد. جوابی که (۲۱۶) را برآورده نماید و دارای n تابع دلخواه باشد جواب عمومی (۲۱۶) نامیده می‌شود. همانند معادلات تفاضلی معمولی از حل تابع همگن (۲۱۶) (یعنی در حالتی که f(t,m)=0 است) تابع

مکمل بدست می‌آید و همچنین هر جوابی که معادله کامل (۲۱۶) را برقرار نماید جواب خاص نامیده می‌شود. همانند معادلات تفاضلی معمولی از قضیه زیر می‌توان در بدست آوردن جواب عمومی کمک گرفت.

قضیه ۳۲

جواب عمومی معادله تفاضلی جزئی (۲۱۶) برابر است با مجموع تابع مکمل و جواب خاص.

۱۳-۱- حل معادلات تفاضلی جزئی

معادلات تفاضلی جزئی را با استفاده از همان روش‌های معادلات تفاضلی معمولی می‌توان حل نمود. تفاوت‌های کمی که در روش حل بین این دو دسته معادلات وجود دارد را نیز با شباهت آنان می‌توان مرتفع نمود. بطور کلی برای یافتن تابع مکمل ابتدا معادله همگن:

$$\varphi(E_1 , E_2)\, z_{t,m} = 0 \qquad (۲۱۷)$$

را حل می‌کنیم و $z_{t,m}$ را به عنوان تابع مکمل بدست می‌آوریم. سپس $z_{t,m}$ را از (۲۱۶) به شکل کلی زیر بدست می‌آوریم:

$$z_{t,m} = \frac{1}{j\,(E_1, E_2)}\ f(t,m) \qquad (۲۱۸)$$

که جواب خاص خواهد بود. تابع مکمل و جواب خاص را با یکدیگر جمع نموده و جواب عمومی را بدست می‌آوریم. جواب عمومی را با در نظرگرفتن شرایط اولیه حل نموده تا جواب نهائی حاصل شود. روش‌های حل در اکثر حالات همان روش‌هائی است که برای معادلات تفاضلی معمولی بکار گرفتیم؛ همانند روش اپراتورها، ضرائب تعیین نشده، تابع مولد، تغییر پارامترها، کاهش مرتبه و از این قبیل. چون اینگونه مباحث را در قسمت‌های قبل مفصلاً توضیح دادیم فقط در این فصل برای حل معادلات تفاضلی جزئی مثال‌هائی را مرور خواهیم کرد.

مثال ۱۳-۱

معادله تفاضلی جزئی $u_{t+1,m} - 4u_{t,m+1} = 0$ را با شرط اولیه $u_{0,m} = m^2$ حل کنید.

ابتدا معادله فوق را با استفاده از اپراتور E به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(E_1 - 4E_2)\, u_{t,m} = 0 \quad \text{یا} \quad E_1 u_{t,m} = 4E_2 u_{t,m}$$

حال m را ثابت فرض کنید. معادله فوق تبدیل به یک معادله تفاضلی معمولی مرتبه اول با ضرائب ثابت تبدیل می‌شود. فرض می‌کنیم $4E_2= a$, $u_{t,m}= w_t$ معادله فوق تبدیل می‌شود به:

$$Ew_t= aw_t \quad ==> \quad w_t= a^t c$$

که c مادامی که t مورد نظر است یک مقدار ثابت است ولی می‌تواند تابعی از m باشد. به عبارت دیگر یک تابع دلخواه از m است. بدین ترتیب می‌توان نوشت: $w_t= a^t c_m$

مقادیر معادل a,w_t را جایگزین می‌کنیم: $u_{t,m} = (4E_2)^t c_m = 4^t E^t{}_2 c_m$

و یا: $u_{t,m} = 4^t c_{m+t}$

که جواب عمومی مسئله فوق می‌باشد. حال شرایط اولیه را وارد می‌کنیم:

$$u_{0,m}= 4^0 c_{m+0} = m^2 \quad ==> \quad c_{m+t} = (m+t)^2$$

پس جواب نهائی برابر خواهد بود با: $u_{t,m} = 4^t (m+t)^2$

مثال ۱۳-۲

معادله تفاضلی جزئی $u_{t+1,m} -2u_{t,m+1} = 3u_{t,m}$ را حل کنید.

معادله فوق را برحسب اپراتور E می‌نویسیم: $(E_1- 2E_2-3)\, u_{t,m}= 0$

و یا به عبارت دیگر: $E_1 u_{t,m} = (2E_2+3)\, u_{t,m}$

معادله فوق یک معادله تفاضلی معمولی مرتبه اول برحسب t می‌باشد. همانند مثال ۱۲-۱ می‌توان نوشت: $u_{t,m} = (2E_2+3)^t c_m$

و یا: $u_{t,m}= 3^t (1+ c_m \frac{2}{3} E_2)^t$

با استفاده از بسط بینم می‌توان نوشت:

$$u_{t,m}=3^t \left[1+t(\frac{2}{3} E_2)+ \frac{t(t-1)}{2!} (\frac{2}{3} E_2)^2+\ldots\right]c_m=3^t\left[c_m+ \frac{2}{3} tc_{m+1}+ \frac{2}{9} t(t-1)c_{m+2}+\ldots\right]$$

مثال ۱۳-۳

معادله تفاضل جزئی $u_{t,m} = pu_{t-1,m} + qu_{t,m-1}$ را با این شرایط حل کنید:

$$\begin{cases} u_{t,0} = 0 & t>0 \quad \text{اگر} \\ u_{0,m}= 1 & m>0 \quad \text{اگر} \\ p+q =1 & p,q>1 \end{cases}$$

معادله فوق را به شکل زیر می‌نویسیم: $E_1E_2\, u_{t-1,m-1} = (pE_2+qE_1)\, u_{t-1,m-1}$

و یا: $(pE^{-1}_1 + qE_2^{-1} - 1)\, u_{t,m} = 0$

همچنین رابطه فوق را می‌توان به اشکال زیر نوشت: $qE^{-1}_1 u_{t,m} = (1 - qE^{-1}_2) u_{t,m}$

و یا: $E_1\, u_{t,m} = \dfrac{p}{1-qE_2^{-1}}\, u_{t,m}$

اگر m را ثابت فرض کنیم معادله آخر یک معادله تفاضلی معمولی خواهد شد. پس:

$$u_{t,m} = \left(\frac{p}{1-qE_2^{-1}}\right)^t c_m = p^t (1-qE_2^{-1})^{-t} c_m = p^t[1+t(qE_2^{-1}) + \frac{t(t+1)}{2!}(qE_2^{-1})^2 + \ldots]\, c_m$$

پس جواب عمومی برابر خواهد بود با: $u_{t,m} = p^t\, [c_m + tq\, c_{m-1} + \dfrac{t(t+1)}{2!}\, q^2\, c_{m-2} + \ldots]$

حال اگر $m=0$ و $t>0$ باشد خواهیم داشت: $0 = p^t\, [c_0 + tq\, c_{-1} + \dfrac{t(t+1)}{2!}\, q^2\, c_{-2} + \ldots]$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت: $c_0 = 0\, , c_{-1}=0\, , c_{-2}=0\, , \ldots$

اگر $t=0\, , m>0$ باشد داریم: $c_m = 1\, ,\ m>0$

پس برای $m,t>0$ می‌توانیم بنویسیم:

$$u_{t,m} = p^t[1 + tq + \frac{t(t+1)}{2!}\, q^2 + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+m-2)}{(m-1)!}\, q^{m-1}]$$

که حواب نهائی خواهد بود.

مثال ۱۳-۴

مثال ۱۳-۳ را با استفاده از تابع مولد حل کنید.

تابع مولد $G_t(s)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم: $G_t(s) = u_{t,0} + u_{t,1}s + u_{t,2}\, s^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} u_{t,m}s^m$

معادله تفاضلی جزئی صورت مسئله را در s^m ضرب می‌کنیم و مجموع را برروی m از یک تا بینهایت حساب می‌کنیم:

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{t,m}\, s^m = p \sum_{m=1}^{\infty} u_{t-1,m}\, s^m + q \sum_{m=1}^{\infty} u_{t,m-1}\, s^m$$

این رابطه را برحسب تابع مولد $G_t(s)$ می‌نویسیم: $G_t(s) - u_{t,0} = p[G_{t-1}(s) - u_{t-1,0}] + qsG_t(s)$

چون برای $k \geq 1$ داریم $u_{t,0} = 0$ و $u_{t-1,0} = 0$ و همچنین $u_{0,0} = 0$ می‌توان نوشت:

$$G_t(s) = pG_{t-1}(s) + qsG_t(s)$$

یا به عبارت دیگر: $G_t(s) = \dfrac{p}{1-qs}\, G_{t-1}(s)$

این معادله تفاضلی آخر دارای جواب زیر است: $G_t(s)= (\frac{p}{1-qs})^t\, G_0(s)$

از طرفی داریم: $G_0(s)= u_{0,0} + u_{0,1}s + u_{0,2}\, s^2 + \ldots = s+s^2+s^3 + \ldots= \frac{s}{1-s}$

پس: $G_t(s)= \frac{p^t s}{(1-qs)^t(1-s)}$

به عبارت دیگر: $G_t(s)= p^t\, (1-qs)^{-t}\, \frac{s}{1-s}$

و یا: $G_t(s)= p^t[1+tqs+\frac{t(t+1)}{2!}\, q^2s^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\, q^3s^3]\, [s+ s^2+ s^3+\ldots]$

ضریب s^m در حاصلضرب‌های فوق برابر است با:

$$u_{t,m}= p^t\, [1+tq +\frac{t(t+1)}{2!}\, q^2 +\ldots+ \frac{t(t+1)\ldots(t+m-2)}{(m-1)!}\, q^{m-1}]$$

که همان جواب مثال ۱۳-۳ است.

مثال ۱۳-۵

معادله تفاضل جزئی $u_{t+1,m} - 4u_{t,m+1} = 6t^2{}_{m+4}$ را حل کنید.

تابع مکمل این مسئله را در مثال ۱۳-۱ پیدا کردیم. حال احتیاج به محاسبه جواب خاص داریم. این جواب را با استفاده از دو روش ضرائب تعیین نشده و روش اپراتورها بدست می‌آوریم. در روش ضرائب تعیین نشده یک جواب خاص به شکل زیر فرض می‌کنیم:

$$u_{t,m}= A_1t^2{}_m + A_2t_m+ A_3t^2 + A_4t + A_5m+ A_6$$

که $A_1,\ldots,A_6$ مقادیر ثابت هستند. با جایگزینی در معادله صورت مسئله خواهیم داشت:

$$-3A_1t^2m+(2A_1-3A_2)tm-(4A_1+3A_3)t^2+(2A_3-3A_4-4A_2)t+(A_1+A_2-3A_5)m+A_3+A_4-4A_5-3A_6=6t^2m+4$$

با قرار دادن ضرائب معادل می‌توان نوشت:

$$-3A_1=6,\quad 2A_1-3A_2=0,\quad 4A_1+3A_3=0,\quad 2A_3-3A_4-4A_2=0,\quad A_1+A_2-3A_5=0,\quad A_3+A_4-4A_5-3A_6=4$$

پس خواهیم داشت: $A_1= -2\,,\ A_2= -\frac{4}{3}\,,\ A_3= \frac{8}{3}\,,\ A_4 = \frac{32}{9}\,,\ A_5= -\frac{10}{9}\,,\ A_6= \frac{20}{9}$

پس جواب خاص برابر خواهد بود با: $u_{t,m}=-2t^2m - \frac{4}{3}tm + \frac{8}{3}t^2 + \frac{32}{9}t - \frac{10}{9}m + \frac{20}{9}$

همین جواب را با استفاده از اپراتورها چنین بدست می‌آوریم. می‌توانیم معادله کامل صورت مسئله را چنین بنویسیم:

$$\frac{1}{E_1-4E_2}(6t^2m+4)=\frac{1}{-3+\Delta_1-4\Delta_2}(6t^2m+4)=-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-(\Delta_1-4\Delta_2)/3}(6t^2m+4)$$

$$=-\frac{1}{3}[1+\frac{\Delta_1-4\Delta_2}{3}+\frac{(\Delta_1-4\Delta_2)^2}{9}+\ldots](6t^2m+4)$$

$$=-2t^2m-\frac{4}{3}tm+\frac{8}{3}t^2+\frac{32}{9}t-\frac{10}{9}m+\frac{20}{9}$$

جواب عمومی برابر خواهد بود با: $u_{t,m}=4^t c_{m+t}-2t^2m-\frac{4}{3}tm+\frac{8}{3}t^2+\frac{32}{9}t-\frac{10}{9}m+\frac{20}{9}$

مثال ۱۳-۶

جواب مثال ۱۳-۱ را با استفاده جواب i^tj^m که i,j ثابت‌های دلخواه هستند بدست آورید.

جواب فرض شدهٔ: $u_{t,m}=i^tj^m$ را در معادله صورت مسئله جایگزین می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$i^{t+1}j^m-4i^tj^{m+1}=0 \quad ==> \quad i=4j$$

با جایگزین i در جواب فرضی: $u_{t,m}=(4j)^tj^m=4^tj^{t+m}$

از آنجائی که مجموع این جواب‌ها برای هر مقدار j نیز جواب است خواهیم داشت:

$$\sum_j 4^t j^{t+m}=4^t\sum_j j^{t+m}=4^t c_{t+m}$$

که همانند جواب مثال ۱۳-۱ می‌باشد.

مثال ۱۳-۷

جواب عمومی معادله تفاضلی جزئی $u_{t,m}=pu_{t+1,m-1}+qu_{t-1,m+1}$ با شرط ثابت بودن q , p و $p+q=1$ بدست آورید.

این مسئله را به دو روش حل می‌کنیم. جواب زیر را فرض می‌کنیم: $u_{t,m}=i^t,j^m$

با جایگزینی در معادله صورت مسئله خواهیم داشت:

$$pi^2-ij+qj^2=0 \quad ==> \quad i=j,\frac{jq}{p}$$

پس جواب‌ها برابر خواهند بود با: $j^tj^m=j^{t+m}\,,\,(\frac{jq}{p})^tj^m=j^{t+m}(\frac{q}{p})^t$

از آنجائی که مجموع دو جواب فوق خود نیز جواب است، نتیجه می‌گیریم C_{t+m} و $G_{t+m}(\frac{q}{p})^t$ نیز جواب هستند پس جواب عمومی برابر خواهد بود با:

$$u_{t,m} = C_{t+m} + G_{t+m}(\frac{q}{p})^t$$

که G,C توابع دلخواه هستند. همین جواب را می‌توانیم از روش دیگری بدست آوریم. با کمی توجه واضح است که مجموع زیرنویس‌ها در معادله تفاضلی داده شده برابر عدد یک ثابت است. اگر این را با g مشخص کنیم داریم g=t+m و معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$u_{t,g-t} = pu_{t+1,g(t+1)} + qu_{t-1,g-(t-1)}$$

قرار می‌دهیم:

$$u_{t,g-t} = w_t$$

پس می‌توان نوشت:

$$w_t = pw_{t+1} + qw_{t-1}$$

این معادله تفاضلی معمولی براحتی حل می‌شود. جواب برابر می‌شود با:

$$w_t = c_1+c_2(\frac{q}{p})^t$$

مقادیر c_2, c_1 باید به عنوان توابع دلخواهی از ثابت g=t+m فرض شوند پس:

$$c_1=C_{t,m},\ c_2=G_{t+m}$$

با جایگزینی این مقادیر در w_t و همچنین w_t در $u_{t,g-t}$ به جواب زیر خواهیم رسید:

$$u_{t,m} = C_{t+m} + G_{t+m}(\frac{q}{p})^t$$

که همان جوابی است که از روش اول بدست آوردیم.

تمرین ۱۷

معادلات تفاضلی جزئی زیر را حل کنید.

1- $u_{t+1,m} + 2u_{t,m+1} = 0$

2- $u_{t+1,m} + 2u_{t,m+1} = 0$ $\qquad u_{0,m} = 3t+2$

3- $u_{t,m+1} + 2u_{m,t+1} = 3tm-4t+2$

4- $u_{t+h,m} - 3u_{t,m+k} = t+m$

5- $(E_1E_2-2)(E_1-E_2)\, u_{t,m} = 0$

6- $u_{t+1,m+2} - u_{t,m} = 2^{t-m}$

7- $u_{t+1,m+1}-u_{t+1,m} = u_{t,m}$ $\qquad u_{t,0} = \begin{cases} 0 & t>0 \\ 1 & t=0 \end{cases}$

8- $u_{t+2,m+2}-3u_{t+1,m+1} + 2u_{t,m} = 0$

9- $u_{t+1,m} + u_{t,m+1} = 0$

10- $u_{t,m} = u_{t-1,m-1} + u_{t+1,m+1}$

11- $u_{t+3,m}-3u_{t+2,m+1} + 3u_{t+1,m+2} - u_{t,m+3} = 0$

پاسخ تمرینات

پاسخ تمرینات ۱

۳- 1: $-1/16$ 2: $-1/16$ 3: $2b^5$ 4: $2b^5+d$

۴- 1: $-3/32$ 2: $-3/32$ 3: $3b^5$ 4: $3b^5+d$

۵- $y_5 = 2qd + 12c$

پاسخ تمرینات ۲

۱- 1: $8t+2$ 2: $\sqrt[3]{5t+1}$ 3: 4 4: $3t^2+12t+15$ 5: $(t+3)^2$
6: $3t^3+9t^2+6t$ 7: 0 8: $2t^2+14t+19$ 9: $2t^2+14t+19$ 10: $4t^2 = 9t$

۲- 1: خیر 2: بله

۷- 1: $15t^{(4)} + 20^{(3)} - 14t^{(1)} + 3$ 2: $-3t^{(-4)} + 6t^{(-3)}$ 3: $t^{(1)} - t^{(-3)}$
4: $24t^{(-5)} - 18t^{(-4)} + 8$ 5: $4t^3 = 6t^2 - 16t + 28$

۸- 1: $1-3t^{(2)}-2t^{(1)}+2$ 2: $2t^{(4)} + 12t^{(3)} + 19t^{(2)} + 3t^{(1)} + 7$

پاسخ تمرینات ۳

۱- 1: $y_t = (-1)^t 10$ 2: $y_t = b(1/a)^t$ 3: $-4(-3)^{5-t}$

پاسخ تمرینات ۴

۱- 1: $y_t = 3^t + 1$ 2: $y_t = 3(4)^t + 5(2)^t$ 3: $y_t = 2(3)^t - 5(2)^t$
4: $y_t = 2(5)^t + 6(-2)^t$ 5: $y_t = 55(6)^t + 2^{t+1}$ 6: $y_t = 3(2)^t + 5(-2)^t$

پاسخ تمرینات ۵

۱- 1: $x^6+x^2+x^4+x^3+x^2+1 = 0$ 2: $2x^8 - bx^7 + c = 0$ 3: $x^8+d = 0$ 4: $1-x^5=0$

پاسخ تمرینات ۶

۱- 1: $y_t = 3(5)^t+2$ 2: $y_t = 3(-3)^t+1$ 3: $y_t = 5(\frac{1}{2})^t+2$ 4: $y_t = -9(0.2)^t+10$

۲- 1: $y_t=3(4)^t+5(2)^t-3$ 2: $y_t=2(5)^t+6(-2)^t+1$ 3: $y_t=3(2)^t-5(-2)^t-30$

۳- 3: $y_p = -(5/2)t$ 2: $y_p = -1/3\,t$ 3: $y_p = -3/16$ 4: $y_p=t^3$

پاسخ تمرینات ۷

۱- 1: $y_t = a(-3)^t+bt(-3)^t$ 2: $y_t = a(5)^t+b+t(5)^t$

3: $y_t= (10)^t[2Cos(126.9°t)+3Sin(126.9°t)]+2$
4: $y_t=(15)^t[5Cos(36.9°t)+Sin(36.9°t)]$ 5: $y_t= (10)^t[2Cos(53.1°t)+3Sin(53.1°t)]+1$
6: $y_t= (15)^t[5Cos(143.1°t)-Sin(143.1°t)]$ 7: $y_t= 16Cos(90°t)-7Sin(90°t)$

۲- 1: $[-2.444]10^{10}+2$ 2: $[-1.506]10^{10}+1$ 3: -16

۳- 1: $y_t=c_1(-3)^t+c_2(-2)^t$ 2: $y_t=2^t$ 3: $y_t= c_1(-2/3)^t+c_2(-2)^t$

4: $y_t=\frac{5}{6}(3)^t+\frac{7}{6}(-3)^t$ 5: $y_t=4(-\frac{3}{2})^t$ 6: $y_t=2^{t/2}Cos(\frac{3pt}{4})$ 7: $y_t=2^{t-1}Sin(\frac{tp}{2})$

8: $y_t=(\frac{5}{2})^t[c_1Sin(\frac{tp}{2})+c_2Cos(\frac{tp}{2})]$ 9: $y_t=3^t(c_1+c_2t)$ 10: $y_t=(-\frac{1}{2})^t(c_1+c_2t)$

11: $y_t=5(2)^t-2(3)^t-3$ 12: $y_t=c_1Cos\frac{tp}{4}+c_2Sin\frac{tp}{4}+c_3Cos\frac{3tp}{4}+c_4Sin\frac{3tp}{4}$

13: $y_t=c_1(\frac{5}{2})^{\frac{t}{2}}+c_2(-\frac{5}{2})^{\frac{t}{2}}+(\frac{5}{2})^{\frac{t}{2}}[c_3Cos\frac{tp}{2}+c_4Sin\frac{tp}{2}]$

14: $y_t=2^t(c_1+c_2Cos\frac{2pt}{3}+c_3Sin\frac{2pt}{3})$ 15: $y_t=c_1(2)^t+c_2(-2)^t+4^t(c_3Cos\frac{tp}{2}+c_4Sin\frac{tp}{2})$

16: $y_t=c_1(2)^{t/2}(c_2Cos\frac{3tp}{4}+c_3Sin\frac{3tp}{4})$

۴- $y_t=(c_1+c_2t)2^t+(c_3+c_4t+c_5t^2+c_6t^3)(-2)^t+c_7(4)^t+5^t(c_8Cost\theta+c_9Sint\theta),\ \theta=arctg(-\frac{4}{3})$

۵- $(E-2)^2(E+2)^4(E-4)(E^2+6E+25)y_t=0$ و یا:

$y_{t+9}+6y_{t+8}+5y_{t+7}-136y_{t+6}-48y_{t+5}+464y_{t+4}+3376y_{t+3}+1792y_{t+2}-6336y_{t+1}-6400y_t = 0$

۷- 1: $y_t=2^t(2^t-1)$ 2: $y_t=1-1/2^t$ 3: $y_t=2^t(1-t)$

4: $y_t=c_13^{-t}+c_22^{-t}$ 5: $y_t=2(-1)^t(1-t)$ 6: $y_t=c_1+c_2t+c_3t^2$

پاسخ تمرینات ۹

۱- 1: 3 2: 2 3: 1 4: 3 5: 0

۲- ریشه مثبت بزرگتر از دو است و ریشه منفی بین صفر و ۲- می‌باشد.

1: $f_1=3x^2-6x-3$ $f_2=4x+2$ $f_3= -0.75$

2: $f_1=3x^2-3$ $f_2=2x-1$ $f_3=2\frac{1}{4}$

۵- 1: $f_1=3x^2-6x+3$ $f_2= 0$

2: $f_1=3x^2-6x+6$ $f_2=-2x+2$ $f_3=-3$

۶- معادله دوم دو ریشه مختلط دارد. ۷- معادله اول دو ریشه مساوی $x=1$ دارد.

پاسخ تمرینات ۱۰

۱- 1: $y_t=c_1+c_2 2^t+\frac{1}{6}4^t$ 2: $y_t=2^t(c_1+c_2t)+t^2+4t+8$

3: $y_t=2^{-t}(c_1\text{Cos}\frac{tp}{2}+c_2\text{Sin}\frac{tp}{2})+\frac{2t^2}{5}-\frac{57t}{25}+\frac{371}{125}$ 4: $y_t=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+1$

5: $y_t=(-1)^t(c_1+c_2t)+¼t-¼+\frac{1}{9}(2)^t$ 6: $y_t=\frac{3}{2}t(t-1)4^{t-2}$ 7: $y_t=c_1+c_2 2^{-t}+\frac{t^3}{3}-\frac{9t^2}{2}+\frac{127}{6}t$

8: $y_t=2^t(c_1\text{Cos}\frac{tp}{2}+c_2\text{Sin}\frac{tp}{2})+\frac{5}{13}(-3)^t+2t-\frac{4}{5}$ 9: $y_t=c_1+c_2(-1)^t-\frac{9}{8}(3)^{-t}$

10: $y_t=2[\text{Cos}2t+\text{Cos}(2t-4)]/(1+\text{Cos }4)$ 11: $y_t=c_1+c_2 2^t+c_3 3^t+2t+t^2-\frac{3}{2}t(2)^t-\frac{1}{24}5^t$

12: $y_t=c_1 2^t+c_2(-2)^t+2^t(c_3\text{Cos}\frac{tp}{2}+c_4\text{Sin}\frac{tp}{2})-\frac{t^2}{15}+\frac{67}{225}t-\frac{422}{3375}-\frac{4(3)^t}{65}$

13: $y_t=c_1(-1)^t+c_2\text{Cos}\frac{tp}{3}+c_3\text{Sin}\frac{tp}{3})+\frac{t^2}{65+16\cos q}[8\text{Cos}(3t-9)+\text{Cos}3t]$

14: $y_t=c_1(3)^{-t/2}+c_2(-3)^{-t/2}+c_3(-1)^t+c_4+3^t(\frac{t}{208}-\frac{52}{11041})$

۲- $$y_t=\begin{cases} ca^t+b/(1-a) & a\neq 1 \\ c+bt & a=1 \end{cases}$$

پاسخ تمرینات ۱۱

۱- 1: $y_t=c_1+c_2 2^t+2(3)^t-\frac{1}{6}(5)^t$ 2: $y_t=(-2)^t(c_1+c_2t)+\frac{t^2}{7}-\frac{13t}{27}+\frac{7}{9}$

3: $y_t=(c_1+\frac{t}{30})3^t+c_2(-3)^t+\frac{t}{4}-\frac{3}{16}$ 4: $y_t=4^t(c_1+c_2t)+\frac{3}{32}t^2(4)^t-\frac{5}{36}(-2)^t$

5: $y_t=(\frac{1}{2})^t(c_1\text{Cos}\frac{tp}{4}+c_2\text{Sin}\frac{tp}{4})+t^3-6t^2+2t+18+\frac{5^t}{41}$

6: $y_t=2^t(c_1+c_2t)+\frac{2^t}{48}(t^4-4t^3+5t^2-2t)$ 7: $y_t=c_1+c_2t+c_3t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{8}3^{t-1}$

8: $y_t=c_1 2^t+c_2(-2)^t+2^t(c_3\text{Cos}\frac{tp}{4}+c_4\text{Sin}\frac{tp}{4})-\frac{t}{5}-\frac{4}{75}+\frac{t(2)^2}{64}+\frac{3^t}{65}$

۳- $y_t=c_1(-6)^t+c_2 2^t+\frac{1}{258}(25\sqrt{3}\,\text{Sin}\frac{tp}{3}-105\text{Cos}\frac{tp}{3})$

۴- $y_t=c_1 2^t+c_2 4^t-3^t+\frac{t^2}{3}+\frac{8t}{9}+\frac{38}{27}$

۵- $y_t=c_1+c_2t+c_3(-2)^t+(c_4+\frac{t}{60})3^t-\frac{t^4}{72}+\frac{7t^3}{54}-\frac{77}{108}t^2$

۶- $y_t=(c_1+c_2t)\text{Cos}\frac{tp}{2}+(c_3+c_4t)\text{Sin}\frac{tp}{2}+\frac{1}{2}t-\frac{7}{4}$

پاسخ تمرینات ۱۲

۱- 1: $y_t=c_1 2^t+c_2 3^t+\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t-\frac{5}{2}$ 2: $y_t=c_1+c_2t+t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{9}4^t$

3: $y_t=(c_1+c_2t+\frac{3}{2}t^2)2^{-t}$ 4: $y_t=c_1\text{Cos}\frac{tp}{2}+c_2\text{Sin}\frac{tp}{2}+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{t+2r}$

5: $y_t=c_1+c_2(\frac{2}{5})^t-\frac{51}{98}t+\frac{3t^2}{14}+\frac{1}{24}(-2)^t$

6: $y_t=c_1\text{Cos}\frac{tp}{3}+c_2\text{Sin}\frac{tp}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{r=0}^{t}[\frac{1}{(t-r-2)!}\sin\frac{p(r+1)}{3}]$

۴- $y_t=c_1+\frac{29t}{6}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+(c_2-\frac{5}{2}t)2^t+c_3 3^t$

پاسخ تمرینات ۱۴

۱- 1: $y_t=e(t-1)!-\sum_{r=0}^{\infty}(t-1)^{(-r)}$ 2: $y_t=\frac{c(-2)^2}{(t-1)!}+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r t^{(r)}}{2^{r+1}}$

3: $y_t=c(-1)^t(t-1)!+t-1+\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+1}(t-1)^{(-r)}$ 4: $y_t=\frac{1}{5}(t-1)![1+(-4)^{t-1}]$

5: $\frac{1}{(t-1)!}\sum_{r=0}^{\infty}[2^{r+1}r!-2^{r+t}(t+r-1)!]$ 6: $(1+e)\sum_{r=1}^{t-1}(r-1)!-\sum_{s=1}^{t-1}\sum_{r=0}^{\infty}(s-1)^{(-r)}$

7: $y_t=A(t-1)!\sum_{r=1}^{t-1}\frac{1}{r}+B(t-1)!$

8: $y_t=c_1(1+\frac{t^{(2)}}{(1)(3)}+\frac{t^{(4)}}{(1)(3^2)(5)}+\frac{t^{(6)}}{(1)(3^2)(5^2)(7)}+..)+c_2(t^{(1)}+\frac{t^{(3)}}{2(4)}+\frac{t^{(5)}}{(2)(4^2)(6)}+\frac{t^{(7)}}{2(4^2)(6^2)(8)}+..)$

9: $y_t=c_1(\frac{3}{2})^t(t-3)+c_2(2)^{-t}(t+1)$

۳- 1: $y_t=c(t+1)+(t+1)\sum_{r=0}^{t-1}\frac{r(-2)^r}{(r+2)!}$ 2: $y_t=c(t+1)-1+(t+1)\sum_{r=0}^{t-1}\frac{r(-2)^r}{(r+2)!}$

۵- $y_t=\frac{c_1 d^t}{b_t}\left\{1+\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{a_{t+r}}{b_{t+r}}\cdot\frac{a_{t+r-1}}{b_{t+r-1}}\cdots\frac{a_{t+1}}{b_{t+1}}\right]\right\}+c_2\left\{\frac{b_{t-1}}{a_t}\cdot\frac{b_{t-2}}{a_{t-1}}\cdots\frac{b_1}{a_2}\right\}$

پاسخ تمرینات ۱۵

1: $y_t=2/[1+c(-1)^t]$ 2: $y_t=1-\sqrt{2}+2\sqrt{2}/[1+c(2\sqrt{2}-3)^{-t}]$

2: $y_t=tg[c_1 Cos\frac{2pt}{3}+c_2 Sin\frac{2pt}{3}]$ 3: $y_t=k^{1/2}tg[c_1 Cos\frac{2pt}{3}+c_2 Sin\frac{2pt}{3}]$

5: $y_t=e^{3-t}$ 6: $y_t=e^{c_1 a^t+c_2 b^t}, a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ 7: $y_t=Cos[c(2)^t]$

8: $y_t=e^{(-1)^{t-1}}(c_1+c_2 t)$ 9: $y_t=c_1 3^t$ یا $y_t=c_2 2^t$ 10: $y^t=2Cos(p/2^{t+1})$

11: $y_t=tg[c+\sum tg^{-1}(\frac{1}{2^2})]$ 14: $y_t=\frac{c_1 a^{t+1}+c_2 b^{t+2}}{c_1 a^t+c_2 b^t}-B;\ a,b=\frac{1}{2}[B\pm\sqrt{\mathbf{B}^2+4A}]$

15: $y_t=\frac{2(4)(6)\ldots(t-1)ac}{1(3)(5)\ldots t}$ t فرد $y_t=\frac{1(3)(5)\ldots(t-1)}{2(4)(6)\ldots tc}$ t زوج

پاسخ تمرینات ۱۶

1: $u_t=c_1(-2)^t+c_2$ $v_t=-c_1(-2)^t+\frac{1}{2}c_2$

2: $y_t=\frac{1}{4}(t-1)![c_1 2^{t+1}+c_2(-2)^{t+1}]$ $z_t=(t-1)![c_1 2^t+c_2(-2)^t]$

3: $u_t=\{q(u_0+v_0)+[(1-p)u_0-qv_0](p-q)^t\}/(1-p+q)$
$v_t=\{(1-p)(u_0+v_0)+[qv_0-(1-p)u_0](p-q)^t\}/(1-p+q)$

4: $u_t=u_0+(u_0+v_0)q^t$ $v_t=v_0-(u_0+v_0)q^t$

5: $u_t=(c_1+c_2 t)(\sqrt{8})^t+(c_3+c_4 t)(-\sqrt{8})^t, v_t=(2c_1+6c_2+2c_2 t)(\sqrt{8})^{t-1}+(2c_3+6c_4+2c_4 t)(-\sqrt{8})^{t-1}$

۶- ۱:بی‌ثبات، ریشه‌ها منفی یا مختلط trace=-3. ۲: بی‌ثبات $|\mathbf{A}_0|=1.45$. ۳: بی‌ثبات $|\mathbf{A}_{(1)}|=-\frac{1}{4}$

پاسخ تمرینات ۱۷

1: $u_{t,m}=(-2)C_{t+m}$ 2: $u_{t,m}=2^t(3t+3m+2)$ 3: $u_{t,m}=(-2)^{-t}C_{t+m}+tm-(5/3)t-(2/3)m+2$

4: $u_{t,m}=3^{t/h}(\frac{t}{h}+\frac{m}{k})-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}m-\frac{1}{4}h+\frac{3}{4}k$ 5: $u_{t,m}=2^{t/h}C_{t/h-m/k}+G_{t/h-m/k}$

6: $u_{t,m}=C_{2t-m}-2^{t-m+1}$ 7: $u_{t,m}=(\frac{m}{t})$ 8: $u_{t,m}=2^t c_{t-m}+G_{t-m}+2^m H_{t-m}$ 9: $u_{t,m}=C_{t-m}$

10: $u_{t,m}=C_{t-m}Cos\frac{tp}{3}+G_{t-m}Sin\frac{tp}{3}+H_{t-m}Cos\frac{mp}{3}+J_{t-m}Sin\frac{mp}{3}$

11: $u_{t,m}=C_{t+m}+tG_{t+m}+t^2 H_{t+m}$

منابع و مآخذ

- Allen, R.G.D. (1956) Mathematical economics, Macmillan.
- Brand L. (1955) A sequence defined by a difference equation. American math. Monthly, 62, 489-492.
- Bauman,W.J.(1958)Topology of second order linear difference equations,Econometrica,21.
- Bauman W.J. (1970) Economic Dynamics. Macmillan.
- Bender, C.M., S.A. Orszag (1978), Advanced mathematical methods for scientists and engineers, McGraw-hill.
- Bidabad B., B. Bidabad (1990), Complex probability and markov stochastic process.
- Boole, G. (1960) A treatise on the calculus of finite differences, New York, Dover.
- Chaundy T.W., E. Phillips (1936) The convergence of sequences defined by quadratic recurrence formula, Quart J. of math, Oxford series, 7, 74-80.
- Chipman J.S. (1951) The theory of inter-sectoral money, and income formulation, John Hopkins press, Baltimore.
- Chiang, A.C.(1974) Fundamental methods of mathematical economics, McGraw–Hill.
- Carrier G, C.E. Pearson (1955) Ordinary differential equations, McGraw–Hill.
- Chorlton,F.(1965),Ordinary differential &diference equations,London,Van Nonstrand.
- Dorfman, R, P.A. Samuelson, R. Solow, (1957) Linear programming and economic analysis, McGraw- Hill, New york.
- Dhrymes, P.J. (1974) Econometrics, Springer verlag.
- Dhrymes, P.J. (1978) Mathematics for econometrics, Springer verlag.
- Dickinson, D.R. (1967) Operators, Macmillan Pub. Co.
- Fort, T. (1948) Finite differences and difference equations, Oxford Clarondon press.
- Goldberg, S. (1958) Introduction to difference equations, New york, John Wiley.
- Goodwin, R. M (1949) The multiplier as matrix. Economic journal.
- Hildebrand.F.B (1968) Finite difference equtions, Englewood, cliffs, Printice- Hall.
- Hildebrand, F.B. (1952) Methods of Applied mathematics, Printice- Hall.
- Hicks J.R. (1950), The trade cycle, Oxford.
- Issacson, E, H.B Keller (1966), Analysis of numerical methods, wiley.
- Jardan, C. (1960) Calculus of finite differences, New york, Chelsea.
- Klamkin M.S (1953) Geometric convergence, American math. monthly, 60, 256-259.
- Miller, K.S. (1960), The calculus of finite differences and difference equations, Dover.
- Miller (1968) Linear difference equations, New York. Benjamin.
- Milne W.E., Thomson, L.M. (1933), The calculus of finite difference, Macmillan.
- Milne W.E (1949) Numerical calculus, Princeton university press.
- Richardson, C.H (1954) An introduction to the calculus of finite difference, D.Van Nostrand, New York.
- Steffenson, J.F (1965) Interpolation, New York, Chelsea.
- Spiegel, M.R (1971) Calculus of finite differences and difference equations, schaums, outline series McGraw-Hill.
- Samuelson, P.A. (1948) Foundations of economic analysis, Harvard University press.
- Samuelson, P.A (1948) Dynamic process analysis in F. Ellis (ed.) A survey of contemporary economics, Blakiston, Philadelphia.
- Tintner, G. (1942) A simple theory of business fluctuations, Econometria, July-Oct.
- Turvey, R. (1953) Some notes on multiplier theory. AER, June.
- Uspensky J.V (1943) The theory of equation, Mc Graw- Hill.
- Whittaker E., G. Robinson (1966) Calculus of observations, London.

Theory of Difference Equations
&
Dynamic Stability of Equilibrium

Bijan Bidabad