

سازمان برنامه و بودجه
دفتر برنامه‌ریزی منطقه‌ای

آنالیز پرنسیپال کامپوننتز (روش ایجاد مؤلفه‌های اصلی)

در تهیه شاخص‌های توسعه برای شهرستان‌ها جهت برنامه‌ریزی منطقه‌ای

بیژن بیدآباد

پائیز ۱۳۶۲

پیشگفتار

مسئله شناسائی وضع موجود و تطبیق اوضاع مناطق یکی از مهمترین عوامل پی‌ریزی مدل‌های ریاضی در برنامه‌ریزی منطقه‌ای می‌باشد. واضح است که تفاوت‌های چند منطقه در یک خصوصیت خلاصه نمی‌شود، غالباً خصوصیت‌ها در یک منطقه با منطقه دیگر تفاوت بسیار دارد. در یک منطقه ممکن است خصوصیتی خیلی بارز باشد و در منطقه‌ای دیگر خصوصیت دیگری بر سایر خصوصیات برتری داشته باشد، آیا می‌توان تمام خصوصیت‌ها را با هم جمع کرد و شاخصی که بیانگر وضع یک منطقه نسبت به مناطق دیگر باشد ایجاد نمود، و یا روش‌های دیگری مانند روش فوق انتخاب کرد؟ جواب کاملاً واضح است که تعداد بیمارستان را با تعداد قنات و معادن و صنایع به صورت ساده نمی‌توان جمع و تفریق نمود. حتی در بعضی اوقات دیده شده است که پس از دادن وزنی به ارقام مذکور آنها را با هم جمع و تفریق می‌نمایند. پرواضح است که روش‌های فوق خطاهای بسیار زیادی دارند و شاید نادیده گرفتن روش‌های علمی در این مورد می‌باشند که هر کس به سلیقه خود می‌تواند شاخص ایجاد کند ولی تضمینی ندارد که شاخص‌ها همه بیانگر یک مطلب باشند.

در جهت ایجاد شاخص‌های علمی و روش‌های طبقه‌بندی، علوم اجتماعی پیشرفت‌های زیادی کرده است و ای بسا پشت پا زدن به واقعیت‌های علمی است که آنها را نادیده فرض کنیم و به دنبال روش‌هایی باشیم که کلاً دیدگاه خود ما را ارائه دهد نه واقعیت موجود را. چندی پیش در جهت بررسی چنین شاخص‌هایی سعی شد که مقاله کوتاهی تحت عنوان "آنالیز تکسونومی (روش طبقه‌بندی گروه‌های همگن) در طبقه‌بندی شهرستان‌ها و ایجاد شاخص‌های توسعه جهت برنامه‌ریزی منطقه‌ای" نوشته شود که با استقبال فراوانی که از آن به عمل آمد نگارنده را به این فکر انداخت که نگاهی هر چند مختصر نیز به روش‌های متداول دیگر انداخته شود. لذا روش آنالیز پرنسپال کامپوننتز از میان انبوه روش‌های موجود به دلیل معروفیت و کاربرد زیاد آن انتخاب گردید.

غالب اوقات این فکر پیش می‌آید که شاید کاربرد ریاضیات در بررسی الگوهای اجتماعی نحوه بررسی را مشکل‌تر می‌سازد ولی باید اذعان داشت که کاربرد الگوهای ریاضی باعث درک بهتر مطالب می‌شود نه غامض شدن مسئله، بواسطه این امر سعی ما بر این بوده تا در این مقاله مطلب به شکلی ارائه شو که خواننده قدم به قدم در فراگرد مسئله پیش رود نه اینکه قسمتی نامفهوم بماند و مطلب در نظر وی بریده جلوه گردد. در آخر از آقای نبی که ویرایش مقاله و خانم عنبری که تایپ آن را عهده‌دار شدند تشکر نموده و امیدوارم که سایر همکاران گرامی نیز از کمک‌های فکری خود دریغ ننموده و نگارنده را جهت تکمیل و رفع نواقص این مقاله راهنمایی فرمایند.

بیژن بیدآباد

کارشناس دفتر برنامه‌ریزی منطقه‌ای

آنالیز پرنسپال کامپوننتز

آنالیز پرنسپال کامپوننتز Principle Components یا مؤلفه‌های اصلی یکی از قدیمی‌ترین تکنیک‌های تجزیه تحلیل داده‌های آماری با واریاسیون‌های چند بُعدی یا Multivariate بوده و می‌توان آن را یکی از با استفاده‌ترین راه‌های خلاصه کردن یک تعداد از متغیرها به شکل فشرده و پیدا کردن ساختار کواریانس آنها دانست. همچنین روش پرنسپال کامپوننتز قادر است که پدیده‌هایی را که از لحاظ ارزیابی کمی مشکلات زیادی دارند را دسته بندی نموده و جهت توجیه آنها شاخص‌هایی ارائه دهد. متدلوژی آن تا حدی شبیه به بسط روش حداقل مربعات ارتوگونال Orthogonal Least Squares می‌باشد که توسط K. Pearson¹ در سال ۱۹۰۱ ارائه گردید و بعد از آن توسط H. Hotelling² در سال ۱۹۳۶ برای تجربه و تحلیل ساختار همبستگی گسترش یافت. مقصود ما از ارائه این مقاله فقط معرفی مختصر روش پرنسپال کامپوننتز می‌باشد نه بررسی تمام جوانب روش مذکور. برای توضیحات کامل‌تر می‌توان به متون Multivariate Analysis مراجعه نمود.

مجموعه F را در نظر می‌گیریم که شامل n عضو بوده که هر کدام شهرستان‌های مختلف ۱ و ۲ و ... و n باشد برای یک گروه از متغیرهای ۱ و ۲ و ... و m که همان خصوصیت‌ها یا شاخص‌های اولیه‌ای هستند که به عنوان داده‌ها در الگو ظاهر می‌شوند یا به عبارت دیگر داده‌های اولیه ما به شکل زیر می‌باشند.

$$(1) \quad P_1(y_1, y_2, \dots, y_m), P_2(y_1, y_2, \dots, y_m), \dots, P_n(y_1, y_2, \dots, y_m).$$

بردارهای فوق را می‌توان به شکل ماتریس زیر نشان داد:

ماتریس (الف)

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nm} \end{bmatrix}$$

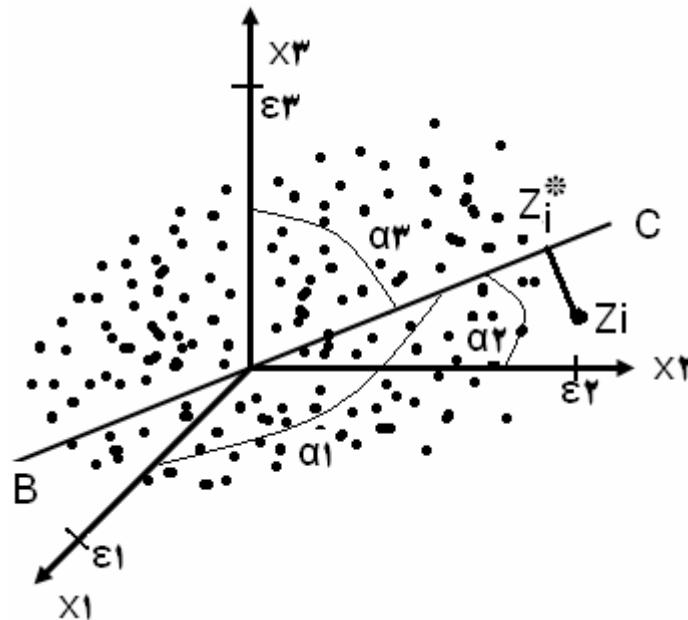
در ماتریس فوق n و ... و ۲ و ۱ و i=1 و m و ... و ۲ و ۱ و j و Y_{ij} معرف خصوصیت jام از شهرستان iام می‌باشد. یعنی هر کدام از n شهرستان (ردیف) دارای m خصوصیت (ستون) قابل اندازه‌گیری هستند.

¹- K. Pearson, "On lines and plans of closest fit to systems of points in space", Philosophical Magazine, # (1901): pp. 559 – 572.

²- H. Hotelling, "Simplified calculation of principal components" Psychometrika I (1936) PP. 27 – 35.

هر عضو از جامعه مذکور ما توسط یک بردار در فضای m بعدی نمایش داده می شود که هر بعد متریب با یک خصوصیت است. برای روشن تر شدن آنالیز پرنسپال کامپوننتز می توانیم m را مساوی ۳ قرار داده و توزیع متغیرها را به شکل انبوهی از نقاط پراکنده به شکل نمودار (۱) نشان دهیم:

نمودار (۱)



برای سهولت محورها طوری رسم شده اند که نقطه میانگین های نمونه \bar{Z}_i با مبدا مختصات یکی باشند البته این فرض مهمی است بدین معنی که عضوهای ماتریس الف را به عنوان انحراف از میانگین هر ستون در نظر گرفته ایم یعنی ماتریس Y را به ماتریس X تبدیل کرده ایم که :

$$(1/1) \quad X_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_j$$

که :

$$(1/2) \quad \bar{Y}_j = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{ij}}{n}$$

$$x = \begin{bmatrix} Y_{11} - Y_1 & Y_{12} - Y_2 \dots Y_{1m} - Y_m \\ Y_{21} - Y_1 & Y_{22} - Y_2 \dots Y_{2m} - Y_m \\ \vdots & \vdots \\ Y_{n1} - Y_1 & Y_{n2} - Y_2 \dots Y_{nm} - Y_m \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

ماتریس ب

از جهتی دیگر باید به خاطر داشت که تمام Y_{ij} ها باید دارای یک مقیاس اندازه گیری باشند. گرچه اگر دارای یک مقیاس واحد اندازه گیری هم نباشند می توان آنها را به شکلی که بعداً توضیح داده خواهد شد بکاربرد ولی به هر حال در این قدم لطمه‌ای به روش ما نخواهد زد و فقط باید بیاد داشت تا در محل خود توضیح داده شود.

بر روی هر محور یک بردار واحد ($\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$) در مقیاس‌های مناسب مشخص شده‌اند. حال متغیرهای X_1, X_2, X_3 را می توان به عنوان اسکالر قلمداد کرد بطوریکه هر بردار Z_i بتواند به عنوان یک ترکیب خطی از مشاهدات مربوط به سه متغیر تعریف شود:

$$(۲) \quad Z_i = \varepsilon_1 X_{i1} + \varepsilon_2 X_{i2} + \varepsilon_3 X_{i3}$$

حال یک شعاع دلخواه مانند BC را در نظر می گیریم که از مبدا مختصات عبور می کند. این شعاع را می توانیم با سه زاویه‌ای که با محورهای مختصات می سازد $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ کاملاً معین کنیم. شرط لازم برای اینکه شعاع مزبور یک شعاع واحد باشد باید داشته باشیم:

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

فرض کنید هر بردار بر روی شعاع BC بوسیله یک عمودی تصویر شده است. هر تصویر بر روی BC می تواند توسط یک تابعی از سه کسینوس زوایای $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ تعریف شود به ترتیبی که در ازای هر بردار برابر باشد با:

$$(۴) \quad \|Z_i\| = \varepsilon_1 X_{i1} \cdot \cos \alpha_1 + \varepsilon_2 X_{i2} \cos \alpha_2 + \varepsilon_3 X_{i3} \cos \alpha_3$$

حال فرض می کنیم اجتماع بردارها، که به هر کدام بیانگر یک عضو از جامعه می باشند بطور تصادفی توزیع نشده و یک شکل الیپسوئید (Ellipsoid) را تشکیل داده‌اند مانند نمودار (۱). اگر شعاع مورد نظر ما بخواهد به عنوان نماینده این الیپسوئید در نظر گرفته شود باید هر چه نزدیکتر به محور اصلی آن باشد این موضوع را از دو راه می توانیم بدست بیاوریم:

الف - با حداقل کردن مجموع مجذورات فواصل از هر نقطه تا تصویر آن بر روی شعاع که روش رگرسیون ارتوگونال می باشد.

ب- با حداکثر کردن واریانس تصاویر بر روی شعاع به عبارت دیگر: با حداکثر کردن مجموع مجذورات درازای تصاویر بردارها.

قدم بعدی ما انتخاب زوایای α است بطوری که واریانس حداکثر شود با توجه به این شرط که شعاع بدست آمده واحد باشد و از مبدا مختصات عبور کند.
برای سهولت فرض می‌کنیم:

$$(5) \quad a_1 = \varepsilon_1 \cos \alpha_1$$

$$(6) \quad a_2 = \varepsilon_2 \cos \alpha_2$$

$$(7) \quad a_3 = \varepsilon_3 \cos \alpha_3$$

واریانس تصاویر بر روی شعاع برابر خواهند بود با:

$$(8) \quad V_1 = (a_1 X_{11} + a_2 X_{12} + a_3 X_{13})^2$$

$$(9) \quad V_2 = (a_1 X_{21} + a_2 X_{22} + a_3 X_{23})^2$$

$$(10) \quad V_3 = (a_1 X_{31} + a_2 X_{32} + a_3 X_{33})^2$$

$$(11) \quad V = V_1 + V_2 + V_3$$

مجموع کل واریانسها برابر خواهد بود با (۱۱) یا:

$$(12) \quad V = \sum_{i=1}^n (a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + a_3 X_{i3})^2$$

حال تابع V باید حداکثر گردد به شرطی که:

$$(13) \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

شرط (۱۳) با جایگزینی (۵) و (۶) و (۷) در معادله (۳) حاصل شده است. حال دوباره برمی‌گردیم به صورت اصلی مسئله که m و ... و ۲ و ۱ = n باشد بردارهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(14) \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

بردار ستونی a بابعاد $m \times 1$

$$(15) \quad a' = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m]$$

ترانسپوز بردار a بابعاد $1 \times m$

پس شرط (۱۳) را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$(16) \quad a'a=1$$

$$(17) \quad [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$$

تابع V برای $m=3$ شکل معادله (۱۲) را به خود گرفته است برای m و 2 و 1 به شکل زیر در خواهد آمد:

$$(18) \quad V = \sum_{i=1}^n (a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + \dots + a_i X_{im})^2$$

$$(19) \quad V = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j X_{ij} \right)^2$$

واضح است که تابع V کوادراتیک (Quadratic) می‌باشد. اگر شکل (۱۹) یا (۱۸) آن را بسط دهیم به شکل زیر در خواهد آمد:

$$(20) \quad V = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right)^2 = \sum_{i=1}^n (a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \dots + a_m x_{im})^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (a_1^2 x_{i1}^2 + \dots + a_m^2 x_{im}^2 + 2a_1 x_{i1} a_2 x_{i2} + \dots + 2a_1 x_{i2} a_m x_{im} + 2a_2 x_{i2} a_3 x_{i3} + \dots + 2a_2 x_{i2} a_m x_{im} + \dots)$$

یا:

$$(21) \quad V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_j^2 x_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{r < k}^{m-1 < m} a_r a_k x_{ir} x_{ik}$$

$$(j, k = 1, 2, \dots, m)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(r = 1, 2, \dots, m-1)$$

حالا شکل (۲۱) تابع V را با توجه به محدودیت (۱۷) ماکزیمیم می‌کنیم:

$$(22) \quad \text{Max} : V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_j^2 x_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{r < k}^{k=m} a_r a_k x_{ir} x_{ik}$$

$$(23) \quad \text{STo} : \sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$$

برای حل مسئله فوق از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$(23/1) \quad \text{Max} : L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_j^2 x_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{r < k}^{k=m} a_r a_k x_{ir} x_{ik} - \lambda \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 - 1 \right)$$

شرط لازم برای ماکزیمیم کردن را تشکیل می‌دهیم یا به عبارت دیگر مشتق‌های جزئی را نسبت به a_i, λ گرفته مساوی صفر قرار داده:

$$(23/2) \quad \frac{\delta L}{\delta a_2} = 2 \sum_{i=1}^n x_{i1} (a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \dots + a_m x_{im}) - 2\lambda a_1 = 0$$

$$(23/3) \quad \frac{\delta L}{\delta a_2} = 2 \sum_{i=1}^n x_{i2} (a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \dots + a_m x_{im}) - 2\lambda a_2 = 0$$

⋮

$$(23/4) \quad \frac{\delta L}{\delta a_m} = 2 \sum_{i=1}^n x_{im} (a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \dots + a_m x_{im}) - 2\lambda a_m = 0$$

$$(23/5) \quad \frac{\delta L}{\delta \lambda} = \sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 = 0$$

دستگاه بالا دارای $m+1$ مجهول و $m+1$ معادله می‌باشد پس از حل مقادیر a_i ها و λ بدست آمده که اگر آنها را در معادلات:

$$(23/6) \quad Z_i = a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \dots + a_m x_{im} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

بگذاریم مقادیر Z_i بدست آمده که مؤلفه‌های اصلی یا پرنسپال کامپوننتز متغیرهای ما برای n شهرستان می‌باشد. البته شهرستان کافی هم باید برقرار باشد به این ترتیب که اگر d را علامت دیفرانسیل در نظر بگیریم و $V_{ij} da_i da_j$ را مشتق مرتبه دوم نسبت به a_i و بعد a_j در نظر بگیریم نامساوی زیر که قسمت چپ آن کوادراتیک است برقرار باشد.^۳

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m V_{ij} da_i da_j < 0$$

ولی ناگفته نماند که سیستم معادلات (۲۳/۲) تا (۲۳/۵) سیستم معادلات همگن می‌باشد که دارای دو دسته جواب trivial (صفر) و nontrivial (غیر صفر) می‌باشد که حل آن با استفاده از جبر ماتریس‌ها توضیح داده خواهد شد.

حالا دوباره برمی‌گردیم به روشی که بتوان آن را با استفاده از جبر ماتریس‌ها حل کرد و تسهیلاتی در جهت حل سیستم معادلات فوق ایجاد کنیم و یا اگر مقیاس‌های متفاوت در ستون‌های ماتریس داده‌ها (ماتریس الف) داشته باشیم بتوانیم مشکل ایجاد شده را برطرف کنیم.

حال ماتریس S که ماتریس واریانس - کواریانس است را معرفی می‌کنیم:

ماتریس (ج)

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$$

³ - Henderson & Quandt; Microeconomic theory, a mathematical approach, mathematical appendix.

ماتریس S ماتریسی است مربع با ابعاد mxm تمام اعضای آن نسبت به قطر ماتریس قرینه می‌باشند. عناصر قطر اصلی آن نشان‌دهنده واریانس یک متغیر و عناصری که خارج از قطر اصلی قرار دارند به عنوان کواریانس بین دو متغیر می‌باشند. اعضای تشکیل دهنده آن:

$$(23/7) \quad \sigma_{rk} = \sum_{i=1}^n x_{ir} x_{ik} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{ir} x_{ik}}{n} = Cov(x_r, x_k)$$

برای

$$\sigma_{rk} = Cov(x_r, x_k), r \neq k, \quad \sigma_{rk} = Var(x_r), r = k$$

می‌باشد. براحتی می‌توان نشان داد که معادله (۲۳/۷) به شکل زیر است:

$$(23/8) \quad \sigma_{rk} = \sum_{i=1}^n x_{ir} x_{ik}$$

با گذاشتن معادله (۳۶) در (۲۳/۷) شکل فوق بدست می‌آید ولی شکل مزبور شکل کلی بدست آوردن σ_{rk} می‌باشد که اگر در (۲۳/۷) معادلات (۳۳) و (۳۴) را جایگزین کنیم به شکل زیر خواهد بود:

$$(23/9) \quad \sum_{i=1}^n (y_{ir} - \bar{y}_r)(y_{ik} - \bar{y}_k) - \frac{\sum_{i=1}^n (y_{ir} - \bar{y}_r) \sum_{i=1}^n (y_{ik} - \bar{y}_k)}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^n y_{ir} y_{ik} - \bar{y}_r \sum_{i=1}^n y_{ik} - \bar{y}_k \sum_{i=1}^n y_{ir} + n \bar{y}_r \bar{y}_k - \frac{\left[\sum_{i=1}^n y_{ir} - n \bar{y}_r \right] \left[\sum_{i=1}^n y_{ik} - n \bar{y}_k \right]}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^n y_{ir} \sum_{i=1}^n y_{ik} - \frac{\sum_{i=1}^n y_{ir} \sum_{i=1}^n y_{ik}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n y_{ik} \sum_{i=1}^n y_{ir}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n y_{ir} \sum_{i=1}^n y_{ik}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n y_{ir} \sum_{i=1}^n y_{ik}}{n}$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^n y_{ik} \sum_{i=1}^n y_{ir}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n y_{ir} \sum_{i=1}^n y_{ik}}{n} = \sum_{i=1}^n y_{ir} y_{ik} - \frac{\sum_{i=1}^n y_{ir} \sum_{i=1}^n y_{ik}}{n}$$

در صورتی که بخواهیم ماتریس S را از ماتریس Y محاسبه کنیم (۲۳/۹) را باید بکار بگیریم و در

صورتی که بخواهیم از ماتریس X استفاده کنیم باید (۲۳/۸) را بکار ببریم.

حال به جای ماکزیمم کردن تابع (۲۲) با توجه به محدودیت (۲۳) رابطه زیر را ماکزیمم می‌کنیم:

$$(24) \quad Max : U = \mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a}$$

$$(25) \quad S T O : \mathbf{a}' \mathbf{a} = 1$$

یا به شکل گسترده آن:

$$Max : U = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$(27) \quad S.To: \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = 1$$

مسئله فوق همان مسئله قبل (۲۲) و (۲۳) است چون اگر رابطه (۲۶) را بسط دهیم به صورت زیر در خواهد آمد:

$$(28) \quad V = \begin{bmatrix} a_1 \sigma_{11} + a_2 \sigma_{21} + \dots + a_m \sigma_{m1}, a_1 \sigma_{12} + a_2 \sigma_{22} + \dots + a_m \sigma_{m2}, \dots, a_1 \sigma_{1m} + a_2 \sigma_{2m} + \dots + a_m \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$(29) \quad U = a_1^2 \sigma_{11} + a_1 a_2 \sigma_{21} + \dots + a_1 a_m \sigma_{m1} + a_1 a_2 \sigma_{12} + a_2^2 \sigma_{22} + \dots + a_m a_2 \sigma_{m2} + \dots + a_m a_1 \sigma_{1m} + a_m a_2 \sigma_{2m} + \dots + a_m^2 \sigma_{mm}$$

اگر مقادیر σ_{ij} را از (۲۳/۷) داخل (۲۹) بگذاریم روابط زیر بدست خواهد آمد:

$$(30) \quad U = a_1^2 \left[\sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_{i1})^2}{n} \right] + a_1 a_2 \left[\sum_{i=1}^n x_{i2} x_{i1} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i2} \sum_{i=1}^n x_{i1}}{n} \right] + \dots + a_1 a_m \left[\sum_{i=1}^n x_{im} x_{i1} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{im} \sum_{i=1}^n x_{i1}}{n} \right] +$$

$$a_2 a_1 \left[\sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1} \sum_{i=1}^n x_{i2}}{n} \right] + a_2^2 \left[\sum_{i=1}^n x_{i2}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_{i2})^2}{n} \right] + \dots + a_2 a_m \left[\sum_{i=1}^n x_{im} x_{i2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{im} \sum_{i=1}^n x_{i2}}{n} \right]$$

$$+ \dots + a_m a_1 \left[\sum_{i=1}^n x_{i1} x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1} \sum_{i=1}^n x_{im}}{n} \right] + a_m a_2 \left[\sum_{i=1}^n x_{i2} x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i2} \sum_{i=1}^n x_{im}}{n} \right] + \dots + a_m^2 \left[\sum_{i=1}^n x_{im}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_{im})^2}{n} \right]$$

$$(31) \quad U = a_1^2 \left[\sum_{i=1}^n x_{i1}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_{i1})^2}{n} \right] + a_2^2 \left[\sum_{i=1}^n x_{i2}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_{i2})^2}{n} \right] + \dots + a_m^2 \left[\sum_{i=1}^n x_{im}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_{im})^2}{n} \right]$$

$$+ 2a_1 a_2 \left[\sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1} \sum_{i=1}^n x_{i2}}{n} \right] + \dots + 2a_1 a_m \left[\sum_{i=1}^n x_{i1} x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1} \sum_{i=1}^n x_{im}}{n} \right] + 2a_2 a_3 \left[\sum_{i=1}^n x_{i2} x_{i3} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i2} \sum_{i=1}^n x_{i3}}{n} \right] +$$

$$+ \dots + 2a_2 a_m \left[\sum_{i=1}^n x_{i2} x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{i2} \sum_{i=1}^n x_{im}}{n} \right] + \dots + 2a_{(m-1)} a_m \left[\sum_{i=1}^n x_i (m-1) x_{im} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i (m-1) \sum_{i=1}^n x_{im}}{n} \right]$$

$$(32) U = \sum_{j=1}^m a_j^2 \left[\sum_{i=1}^n x_{ij}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_{ij})^2}{n} \right] + 2 \sum_{j < k}^m a_j a_k \left[\sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij} \sum_{i=1}^n x_{ik}}{n} \right]$$

واضح است که $\sum_{i=1}^n x_{ik}, \sum_{i=1}^n x_{ij}$ مساوی صفر هستند بدلیل اینکه انحراف از میانگین می باشند و مجموع آنان برابر با صفر است چون داشتیم:

$$(33) x_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_j$$

اگر از دو طرف $\sum_{i=1}^n$ بگیریم:

$$(34) \sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n y_{ij} - n \bar{y}_j$$

$$(35) \sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n y_{ij} - \frac{n \sum_{i=1}^n y_{ij}}{n}$$

$$(36) \sum_{i=1}^n x_{ij} = 0$$

پس اگر نتیجه (۳۶) را داخل (۳۲) بگذاریم تابع U به شکل زیر درمی آید:

$$(37) U = \sum_{j=1}^m a_j^2 \left[\sum_{i=1}^n x_{ij}^2 \right] + 2 \sum_{j < k}^m a_j a_k \left[\sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ik} \right]$$

$$(38) U = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right)^2$$

که همان تابع V (۱۹) است.

واضح است که محدودیت (۲۷) همان محدودیت (۲۳) می باشد. پس مسئله ما در اصل تفاوتی نکرده است حال برمی گردیم به حل مسئله (۲۶) با توجه به محدودیت (۲۷). برای پیدا کردن شعاع BC دوباره از روش لاگرانژ استفاده می کنیم شرط لازم را می نویسیم:

$$(39) \text{Max } : L = [\mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a} + \lambda (1 - \mathbf{a}' \mathbf{a})]$$

یا به طور گسترده:

$$(40) \text{Max } : L = [a_1 \dots a_m] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \lambda \left[1 - [a_1 \dots a_m] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \right]$$

مشتق های جزئی را نسبت به λ و بدست می آوریم و آنها را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$(41) \frac{\delta L}{\delta \mathbf{a}} = 2(\mathbf{S} \mathbf{a} - \lambda \mathbf{I} \mathbf{a}) = \mathbf{o}$$

I و 0 ماتریس‌های واحد و صفر هستند با ابعاد mxm و mx1

$$(42) \quad \frac{\delta L}{\delta \lambda} = (1 - \mathbf{a}'\mathbf{a}) = 0$$

اگر از \mathbf{a} رابطه (۴۱) فاکتور بگیریم می‌شود:

$$(42/1) \quad (\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

گسترده (۴۲/۱) به شکل زیر است:

$$(43) \quad \begin{bmatrix} \frac{\delta L}{\delta a_1} \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta a_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & \dots & 1m \\ \vdots & & \\ m1 & & mm \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

شکل فوق به شرطی برقرار می‌شود که حداقل یکی از $(S - \lambda I)$ و یا \mathbf{a} مساوی صفر شوند. به عبارت دیگر یا:

$$(44) \quad (\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

و یا:

$$(45) \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

یا به عبارت دیگر:

$$(46) \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

و

$$(47) \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر شماره (۴۶) را ساده‌تر بنویسیم به شکل زیر در خواهد آمد.

$$(48) \quad \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \lambda) & \sigma_{12} & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \lambda) & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & (\sigma_{mm} - \lambda) \end{bmatrix} = 0$$

واضح است دستگاه (۴۲/۱) دستگاه معادلات همگن می‌باشد که دارای دو دسته جواب trivial و

nontrivial می‌باشد دسته جواب trivial برابر با رابطه (۴۷) است ولی محدودیت (۲۷) را نادیده می‌گیرد اگر

بخواهیم که جواب‌های nontrivial را بدست آوریم تا محدودیت ما هم برقرار باشد باید از رابطه (۴۴) یا (۴۸)

استفاده کنیم. طبق قضیه‌ای در جبر ماتریس‌ها داریم که اگر ماتریس A در سیستم معادلات همگن $AX=0$ مربع از مرتبه n باشد سیستم معادلات همگن $AX=0$ دارای دسته جواب nontrivial است اگر و فقط اگر ماتریس A مفرد (Singular) باشد یا به عبارت دیگر دترمینان ماتریس A مساوی صفر باشد^۴ پس سیستم معادلات همگن $(S-\lambda I)a=0$ دارای دسته جواب غیر صفر است اگر دترمینان ماتریس $(S-\lambda I)$ مساوی صفر باشد یا:

$$\det.(S-\lambda I)=0$$

یا:

$$(49) \det \begin{bmatrix} (\sigma_{11}-\lambda) & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22}-\lambda) & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & (\sigma_{mm}-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

حل مسائلی از قبیل فوق در جبر ماتریس‌ها بنام مسائل eigenvalue شناخته شده است صورت مسئله این است که دستگاه (۴۲/۱) را داریم مقادیر اسکالرهای λ و بردار غیر صفر a را پیدا کنید بطوریکه:

$$(50) \quad Sa = \lambda a$$

برای هر اسکالر λ و بردار غیر صفر a که درون معادله (۵۰) صادق است λ را eigenvalue و a را eigenvector، S نسبت به λ می‌نامیم. واژه‌های Characteristic value (یا Characteristic root) و Characteristic vector نیز به ترتیب همچنین برای λ و a به کار برده می‌شود (ریشه یا مقدار کرکتیستیک و بردار کرکتیستیک).

حال دوباره معادله (۴۲/۱) را در نظر می‌گیریم همانطور که گفته شد دستگاه مذکور دارای یک دسته جواب‌های غیر صفر nontrivial است اگر شرط (۴۹) برقرار باشد. اگر دترمینان (۴۹) را حساب کنیم به یک پولینومیال (Polynomial) از درجه m بر حسب λ خواهیم رسید:

$$(51) \quad |S - \lambda I| = (-1)^m \lambda^m + \beta_{m-1} \lambda^{m-1} + \beta_{m-2} \lambda^{m-2} + \dots + \beta_1 \lambda + \beta_0$$

پولی نومیال فوق به نام پولی نومیال کرکتیستیک (Characteristic Polynomial) S نامیده می‌شود. هر مقداری از λ که در معادله (۴۹) صادق باشد منتج به ایجاد یک دستگاه معادلات همگن از نوع (۴۲/۱) می‌شود. بدین ترتیب مسئله پیدا کردن مقدار λ به ترتیبی که (۴۲/۱) جواب‌های nontrivial داشته باشد مانند این است که ریشه‌های پولی نومیال کرکتیستیک زیر را پیدا کنیم.

$$(52) \quad (-1)^m \lambda^m + \beta_{m-1} \lambda^{m-1} + \beta_{m-2} \lambda^{m-2} + \dots + \beta_1 + \beta_0 = 0$$

قضیه اصلی جبر تضمین می‌کند که معادله (۵۲) m ریشه (نه لزوماً متمایز) دارد که بعضی از آنها ممکن است مختلط (Complex) باشند. پس باید (۵۲) را حل کرده به جواب‌های آن برسیم. ریشه‌های کرکتیستیک (Characteristic root) آن را بدست آوریم $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. طبق قضیه‌ای در جبر ماتریس‌ها داریم که: اگر

^۴- Computational Matrix Algebra (1974), David I. Steinberg Mc Graw Hill; Theorem 6-9, p. 153.

ماتریسی که در مینان آن پولی نومیال کرکتریستیک می شود قرینه بوده (یعنی $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ و تمام عناصر آن حقیقی (real) باشند، تمام ریشه های کرکتریستیک آن پولی نومیال نیز حقیقی هستند.⁵ از طرفی دیگر باز طبق قضیه⁶ دیگری اگر ماتریسی Positive-definite باشد ریشه های کرکتریستیک آن (eigenvalues) همه مثبت هستند.

با استفاده از قضیه های فوق نتیجه می گیریم که تمام eigenvalue های ما مثبت و حقیقی هستند. و با داشتن این امر می توانیم ساده ترین روش را از میان روش های محاسبه ریشه های پنهان انتخاب کنیم روش های زیادی برای بدست آوردن eigenvalue ها $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ و eigenvector ها (a_1, a_2, \dots, a_m) وجود دارد از جمله⁷:

۱- پیدا کردن حد فواصل eigenvalue ها با استفاده از دیسک گرشگورین (Greschgorin)

۲- روش توان (Power Method)

۳- روش توان و دیفلاسیون (Deflation and Power Method)

۴- روش ژاکوبی (Jacobi's Method)

۵- روش گیونز (Givens Method)

۶- روش هاوز هولدر (Householder's Method)

۷- الگوریتم LR (LR Algorithm)

۸- الگوریتم QR (QR Algorithm)

با توجه به نکات یاد شده روش های مذکور در فوق بهترین و ساده ترین روش، روش توان به نظر می رسد که توسط آن می توانیم بزرگترین مقدار قدر مطلق eigenvalue ها را پیدا کنیم. در این روش پرنسیپال کامپوننتها احتیاج به بزرگترین مقدار eigenvalue داریم و چون تمام eigenvalue ها مثبت و حقیقی هستند روش توان برای بدست آوردن بزرگترین eigenvalue (Principal eigenvalue) از همه مناسب تر به نظر می رسد.

حال سعی می کنیم که روش توان را برای یک ماتریس مربع با بعد $m \times m$ که قرینه بوده و دارای ریشه های کرکتریستیک مثبت و حقیقی باشد توضیح دهیم. از آنجائیکه ماتریس S نیز حقیقی و قرینه می باشد eigenvalue های S نیز حقیقی هستند و S دارای n و eigenvector مستقل خطی می باشد که آنها را با a_1, a_2, \dots, a_m مشخص می کنیم که a_j یک eigenvector در رابطه با λ_j می باشد $j=1, 2, \dots, m$

⁵ Maxima and Minima; theory and economic applications R. Frisch; Dordrecht, Holland, 1966; theorem 13. 60, p. 164.

⁶-Computational Matrix algebra, D.I. Steinberg, Mc Graw hill, 1974.

⁷ Applied numerical methods, Carnahan, Brice, H.A. Luther & James O. Wilkes Wiley, New York, 1969.

Computer solution of linear algebraic systems; Forsythe, George & Cleve B. Moler, Printice Hall, Englewood cliffs N.J. 1967.

Matrix theory, Franklin J.N. Printice Hall, Englewood, cliffs, N.J.1968.

Introduction to numerical analysis, Froberg C.E. Addison - Wesley reading Mass. 1969.

Isaacson, E. & Keller H.B. Analysis of numerical methods Wiley N.Y. 1966.

J. H. Wilkinson, The algebraic eigenvalue problem, Oxford University press, London 1965.

Computational Matrix Algebra, D.I. Steinberg, Mc Graw hill, 1974.

$\mathbf{S}\mathbf{a}_j = \lambda_j \mathbf{a}_j$ بدین ترتیب این m ، eigenvector یک پایه (basis) برای مجموعه همه m مؤلفه‌های بردارها تشکیل می‌دهد. یا به عبارت دیگر با هر برداری مانند \mathbf{W}_0 یک مجموعه واحدی از اسکالرهای $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ وجود دارد بطوریکه:

$$(53) \quad \mathbf{W}_0 = \gamma_1 \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \gamma_m \mathbf{a}_m = \sum_{j=1}^m \gamma_j \mathbf{a}_j$$

حال یک بردار دلخواه غیر صفر \mathbf{W}_0 را در نظر می‌گیریم و بردارهای $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_k, \dots$ را بر طبق فرمول‌های زیر بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{S}\mathbf{W}_0$$

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{S}\mathbf{W}_1 = \mathbf{S}^2 \mathbf{W}_0$$

$$\mathbf{W}_3 = \mathbf{S}\mathbf{W}_2 = \mathbf{S}^3 \mathbf{W}_0$$

⋮

$$(54) \quad \mathbf{W}_k = \mathbf{S}\mathbf{W}_{k-1} = \mathbf{S}^2 \mathbf{W}_{k-2} = \dots = \mathbf{S}^k \mathbf{W}_0$$

اگر شکل بالا را به صورت باز بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \\ \vdots \\ W_{1m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{01} \\ W_{02} \\ \vdots \\ W_{0m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_{21} \\ W_{22} \\ \vdots \\ W_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \\ \vdots \\ W_{1m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} W_{01} \\ W_{02} \\ \vdots \\ W_{0m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_{31} \\ \vdots \\ W_{3m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{21} \\ \vdots \\ W_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} W_{11} \\ \vdots \\ W_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} W_{01} \\ \vdots \\ W_{0m} \end{bmatrix}$$

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

⋮

$$(55) \quad \begin{bmatrix} W_{k1} \\ \vdots \\ W_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{k-1,1} \\ \vdots \\ W_{k-1,m} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} W_{01} \\ \vdots \\ W_{0m} \end{bmatrix}$$

اگر (۵۴) یا (۵۵) را داخل (۵۳) بگذاریم:

$$(56) \quad W_k = S^k \left\{ \sum_{j=1}^m \gamma_j a_j \right\} = \sum_{j=1}^m \gamma_j S^k a_j$$

از آنجائیکه: $j = 1, 2, \dots, m, S^k a_j = \lambda_j^k a_j$ به شکل زیر درمی آید:

$$(57) \quad W_k = \sum_{j=1}^m \gamma_j \lambda_j^k a_j$$

اگر دو طرف ۵۷ را به اسکالر $\frac{1}{\lambda_1^k}$ تقسیم کنیم:

$$(58) \quad \left(\frac{1}{\lambda_1^k}\right) W_k = \sum_{j=1}^m \gamma_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k a_j = \gamma_1 a_1 + \sum_{j=2}^m \gamma_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k a_j$$

چون فرض کرده ایم که λ_1 بزرگترین مقدار λ_j ها باشد $\lambda_1 > \lambda_j$, $j = 1, \dots, m$ وقتی که k افزایش می یابد جمله ای که در سمت راست (۵۸) است کوچکتر و کوچکتر می شود پس اگر حد (۵۸) را بگیریم به طوری که k به سمت بی نهایت میل کند:

$$(59) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{\lambda_1^k}\right) W_k \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \gamma_1 a_1 + \sum_{j=2}^m \gamma_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k a_j \right\} = \gamma_1 a_1$$

پس حد (۵۸) وقتی که k به سمت بی نهایت میل کند برابر خواهد شد با S , eigenvector نسبت به λ_1 . حال باید ببینیم که چگونه می توان از نتیجه فوق در جهت محاسبه λ_1 استفاده کرد ماتریس های زیر را در نظر می گیریم:

$$a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm})^T$$

,

$$W_k = (W_{k1}, W_{k2}, \dots, W_{km})^T$$

که T علامت ترانسپوز می باشد. با استفاده از معادله (۵۷) می توان نوشت:

$$(60) \quad W_{kp} = \sum_{j=1}^m \gamma_j \lambda_j^k a_{jp} \quad P=1, 2, \dots, m$$

برای مؤلفه های W_{k+1} دوباره از (۵۷) استفاده می کنیم:

$$(61) \quad W_{k+1,p} = \sum_{j=1}^m \gamma_j \lambda_j^{k+1} a_{jp}$$

حالا برای هر P که $W_{kp} \neq 0$ نسبت زیر را با استفاده از (۶۰) و (۶۱) محاسبه می کنیم:

$$(62) \quad \frac{W_{k+1,p}}{W_{kp}} = \frac{\sum_{j=1}^m \gamma_j \lambda_j^{k+1} a_{jp}}{\sum_{j=1}^m \gamma_j \lambda_j^k a_{jp}} = \frac{\gamma_1 \lambda_1^{k+1} a_{1p} + \sum_{j=2}^m \gamma_j \lambda_j^{k+1} a_{jp}}{\gamma_1 \lambda_1^k a_{1p} + \sum_{j=2}^m \gamma_j \lambda_j^k a_{jp}} =$$

$$\frac{\lambda_1^{k+1} \left[\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^m \gamma_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1} a_{jp} \right]}{\lambda_1^k \left[\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^m \gamma_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k a_{jp} \right]} = \lambda \frac{\left[\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^m \gamma_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1} a_{jp} \right]}{\left[\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^m \gamma_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k a_{jp} \right]}$$

حال اگر از نتیجه حاصل در (۶۲) حد بگیریم وقتی که k به سمت بی نهایت میل می کند:

$$(63) \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{W_{k+1,p}}{W_{kp}} \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \lambda_1 \frac{\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^m \gamma_j (\lambda_j / \lambda_1)^{k+1} a_{jp}}{\gamma_1 a_{1p} + \sum_{j=2}^m \gamma_j (\lambda_j / \lambda_1)^k a_{jp}} \right\} = \lambda_1$$

با استفاده از (۶۳) حالا رابطه‌ای داریم که قابل محاسبه می‌باشد و آن نسبت ارائه شده در (۶۳) است که اگر k به اندازه کافی بزرگ باشد مقدار کسر (۶۳) به سمت λ_1 میل می‌کند. برای اینکه معین شود که مقدار k چقدر افزایش یابد که کفایت رابطه (۶۳) را بکند باید هر دفعه بردار W_{k+1} و پس از آن نسبت $W_{k+1,p} / W_{kp}$ محاسبه شود. هر وقت که تمام این نسبت‌ها تقریباً درون حدود قابل قبولی از لحاظ تفاوت (مثلاً تا ۴ رقم اعشار) واقع شدند دیگر لزومی به افزایش k نیست. در این زمان بردار W_{k+1} (آخرین مقادیر محاسبه شده) در واقع یک eigenvector نسبت به λ_1 خواهد بود. و از معادله (۶۳) داریم:

$$W_{k+1} \approx \lambda_1 W_k$$

و با تعریف بیان شده داریم که:

$$W_{k+1} = S W_k$$

یک جزء محاسباتی دیگر که باید ذکر شود عبارت از این است که در محاسبه بردارهای W_k باید در نظر داشت که در معادله (۵۷) اگر λ_1 بزرگتر از یک باشد سمت راست معادله (۵۷) و بدین ترتیب مؤلفه‌های W_k در موقع افزایش k افزایش بیشتری دارد. به عبارت دیگر $\lambda_1 < 1$ باشد این جمله در موقع افزایش k به سمت صفر میل می‌کند. برای اینکه از این مشکل محاسباتی اجتناب شود تغییرات زیر را بکار می‌گیریم: علی‌رغم محاسبه بردارهای W_0, W_1, \dots, W_k بردارهای $\hat{W}_0, \hat{W}_1, \dots, \hat{W}_k$ را نیز محاسبه می‌کنیم بطوری که:

$$(64) \quad \hat{W}_k = \mu_k W_k$$

$$(65) \quad \mu_k = 1 / \left\{ \max_{0=1,2,\dots,m} [W_{kp}] \right\}$$

$$(66) \quad W_{k+1} = S \hat{W}_k$$

بنابراین مؤلفه‌های بردارهای \hat{W}_k, \hat{W}_{k+1} همیشه کوچکتر یا مساوی یک هستند و حداقل یکی از آنها مساوی یک خواهد بود بنابراین مشکل مذکور در پاراگراف قبل از بین می‌رود. ضمناً باید بخاطر داشت الان نسبت مؤلفه‌های W_{k+1} به W_k را برای محاسبه λ_1 باید به کار برد نه نسبت مؤلفه‌های W_{k+1}, \hat{W}_{k+1} .

حالا روش توان عنوان شده را برای محاسبه λ_1 خلاصه می‌کنیم:

۱- بردار دلخواه W_0 را انتخاب نموده و k را مساوی یک قرار می‌دهیم.

۲- عبارت $\hat{W}_k = \mu_k W_k$ را با استفاده از معادله (۶۵) حساب نموده سپس $W_{k+1} = S \hat{W}_k$ را محاسبه می‌کنیم.

۳- برای هر W_{kp} غیر صفر ($P=1, 2, \dots, m$) نسبت زیر را حساب می‌کنیم:

$$(67) \quad r_p = (W_{k+1,p}) / (\hat{W}_{kp})$$

۴- نسبت‌های r_p را که در قدم ۳ محاسبه شده است مقایسه می‌کنیم. اگر همه آنها تقریباً مساوی بودند (یا درون فاصله مورد نظر از لحاظ صحت واقع شدند) سپس:

$$(68) \quad \lambda_1 = r_p$$

$$(69) \quad a_1 = W_{k+1}$$

باشد و روش به پایان می‌رسد. اگر این نسبت‌ها تقریباً مساوی نبودند k را یک واحد اضافه می‌کنیم و به قدم دوم بر می‌گردیم. نکته‌ای که قابل ذکر است این است که تعداد حلقه‌های محاسباتی فوق بستگی شدید به انتخاب بردار W_0 دارد ولی هنوز معیاری در دست نیست که بتوان از قبل تعیین کرد که بردار W_0 چه باشد که درجه همگرایی (Convergence ratio) روش توان بیشتر شود.

حال به طریق فوق مقدار λ_1 یا بزرگترین eigenvalue نسبت به S را پیدا می‌کنیم. اگر از روش‌های دیگر به دنبال eigenvalue های S می‌گشیم پس از بدست آوردن آنها باید eigenvector مربوط به λ_1 را نیز پیدا کنیم. ولی روش توان خود eigenvector مربوط به بزرگترین eigenvalue را هم ارائه می‌دهد مانند معادله (۶۹).

Eigenvector پیدا شده a_1 نسبت ب بزرگترین ریشه پنهان (eigenvalue) یا λ_1 را درون دستگاه معادلات زیر بگذاریم مؤلفه‌های اصلی یا پرنسپال کامپوننتز برای n شهرستان بدست می‌آیند:

$$(70) \quad Z_1 = a_1 y_{11} + a_2 y_{12} + a_3 y_{13} + \dots + a_m y_{1m}$$

$$(71) \quad Z_2 = a_1 y_{21} + a_2 y_{22} + a_3 y_{23} + \dots + a_m y_{2m}$$

$$(72) \quad Z_3 = a_1 y_{31} + a_2 y_{32} + a_3 y_{33} + \dots + a_m y_{3m}$$

.....
.....

$$(73) \quad Z_n = a_1 y_{n1} + a_2 y_{n2} + a_3 y_{n3} + \dots + a_m y_{nm}$$

معادلات (۷۰) تا (۷۳) را به شکل زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$(74) \quad \mathbf{Z} = \mathbf{y}\mathbf{a}$$

متغیرهای جدید Z_1 تا Z_n از دستگاه فوق بدست می‌آیند قسمت اعظم واریانس توزیع Y را تشریح نموده و متغیرهای اصلی را با حداقل کاهش اطلاعات بیان می‌نمایند. حالا برمی‌گردیم به نکته‌ای که قبلاً اشاره شد در اول فرض کردیم که تمام مقیاس‌های متغیرهای به کار گرفته شده در ماتریس (الف) یا Y باید یکسان باشند تا بتوانیم از روش ماتریس S یا ماتریس واریانس کواریانس استفاده کنیم اگر مقیاس‌ها مساوی نبود در

مسئله (۲۴) یا (۲۶) به جای ماتریس واریانس - کواریانس همبستگی R را به کار می‌بریم. ماتریس R نیز ماتریسی است مربع با بعد mxm و نسبت به قطر اصلی آن قرینه بوده و قطر اصلی آن برابر با یک می‌باشد:

$$(74) \quad R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2m} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \dots & \rho_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \rho_{m3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

وقتی $r \neq k$ باشد $\rho_{rk} = \rho_{kr}$ و وقتی $r=k$ باشد $\rho_{rk} = 1$. مقادیر ρ_{rk} از فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

$$(75) \quad \rho_{rk} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ir} y_{ik} - \frac{\sum_{i=1}^n y_{ir} \sum_{i=1}^n y_{ik}}{n}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n y_{ir}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_{ir})^2}{n} \right] \left[\sum_{i=1}^n y_{ik}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_{ik})^2}{n} \right]}}$$

صورت کسر (۷۵) معادل کواریانس (y_r, y_k) می‌باشد $(Cov(y_r, y_k))$ که همان σ_{rk} در ماتریس (ج) یا ماتریس S می‌باشد یا به عبارت دیگر همان فرمول (۲۳/۶) است. مخرج کسر (۷۵) برابر با واریانس y_r و واریانس y_k می‌باشد که می‌توان ρ_{rk} را به شکل زیر نوشت:

$$(76) \quad \rho_{rk} = \frac{Cov(y_r, y_k)}{\sqrt{Var(y_r)Var(y_k)}}$$

تعریف دیگری که از (۷۶) می‌توانیم بکنیم این است که σ_{rk} ماتریس (ج) یا ماتریس S (ماتریس واریانس - کواریانس) را نرمال کرده‌ایم. البته خواص ریاضی آنالیز پرنسپال کامپوننتز در زمانی که ماتریس R (ماتریس همبستگی) بکار برده می‌شود با زمانی که ماتریس S (ماتریس واریانس - کواریانس) استفاده می‌شود یکسان نیست ولی به هر حال به این شکل مکرراً مورد استفاده قرار می‌گیرد.

روش دیگری که می‌توانیم اتخاذ کنیم تا مقیاس‌های متفاوت را از بین ببریم این است که از اول ماتریس Y را استاندارد کنیم.^۸ برای این کار اول میانگین هر ستون از ماتریس Y را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij}$$

سپس انحراف معیار هر ستون از ماتریس Y را محاسبه می‌کنیم:

^۸ - برای توضیح کامل روش استاندارد کردن می‌توان رجوع کرد به: آنالیز تکسونومی (روش طبقه‌بندی گروه‌های همگن) و کاربرد آن در طبقه‌بندی شهرستان‌ها و ایجاد شاخص‌های توسعه جهت برنامه‌ریزی منطقه‌ای، سازمان برنامه و بودجه استان مرکزی (اراک) بیژن پیدآباد، تیرماه ۱۳۶۲.

$$Sd_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_{ij}^2}{n}}$$

با در دست داشتن میانگین و انحراف معیار هر ستون از ماتریس Y ماتریس D را ب ابعاد nxm تشکیل می دهیم به طوری که هر عضو آن برابر با فرمول زیر باشد:

$$D_{ij} = \frac{y_{ij} - \bar{y}_j}{sd_j}$$

واضح است که صورت کسر فوق اعضاء ماتریس X را تشکیل می دهند پس:

$$D_{ij} = \frac{x_{ij}}{sd_j}$$

ماتریس D به شکل زیر خواهد بود:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1m} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2m} \\ \vdots & & & \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{11}}{sd_1} & \frac{x_{12}}{sd_2} & \dots & \frac{x_{1m}}{sd_m} \\ \frac{x_{21}}{sd_1} & \frac{x_{22}}{sd_2} & \dots & \frac{x_{2m}}{sd_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{x_{n1}}{sd_1} & \frac{x_{n2}}{sd_2} & \dots & \frac{x_{nm}}{sd_m} \end{bmatrix}$$

حال یک سری نکات اساسی برای استفاده علمی این روش را باید یادآور شویم در درجه اول باید به خاطر داشت که تمام m متغیرها یا خصوصیت های ما باید طوری انتخاب شوند که توسعه یافتگی یک تابع افزایشده از آن متغیر باشد. مثلاً می توان توسعه یافتگی را یک تابع افزایشده از تعداد تخت های بیمارستانی دانست ولی یک تابع کاهشده از بیماری های ناشی از سؤ تغذیه دانست. در صورتی که توسعه یافتگی تابع کاهشده ای از یک خصوصیت بود می توان تمام اطلاعات مربوط به آن خصوصیت را که در ستون زام ماتریس Y قرار می گیرند از اول معکوس کرد و بعد محاسبات بعدی را شروع نمود. واضح است که در آخر کار محاسبات که به بردار Z خواهیم رسید. هر شهرستانی که Z آن بزرگتر بود توسعه یافته تر از شهرستان های دیگر می باشد. عملیات لازم برای محاسبه پرنسپال کامپوننتز به طور خلاصه در زیر آورده شده است:

- ۱- ماتریس Y را تشکیل می دهیم.
 - ۲- ماتریس X را با استفاده از Y محاسبه می کنیم
 - ۳- ماتریس S و یا R را با استفاده از X محاسبه می نمائیم.
 - ۴- Eigenvector S یا R را نسبت به بزرگترین eigenvalue محاسبه می کنیم.
 - ۵- بردار حاصل از ۴ را در معادله $Z=Ya$ می گذاریم و مقادیر Z را حساب می کنیم.
- برای واضح تر شدن روش بدست آوردن مؤلفه های اصلی یک مثال ساده آورده شده است در اینجا شهرستان های استان مرکزی را از لحاظ وضعیت آموزش و پرورش مورد بررسی قرار می دهیم.

شهرستان‌های استان مرکزی به شرح زیر می‌باشند:

الف :	اراک	د :	آشتیان	ز :	قم
ب :	سربند	ه :	خمین	ح :	محلات
ج :	تفرش	و :	ساوه	ط :	دلیجان

آمارهای بکار گرفته شده در مسئله نمونه عبارتند از:

۱- تعداد کل کلاس‌های آموزشگاه‌های دانش‌آموزان استثنائی شهرستان تقسیم بر کل جمعیت ۱۷-۶ ساله شهرستان

۲- تعداد کل کلاس‌های مدارس ابتدائی تقسیم بر کل جمعیت ۱۰-۶ ساله شهرستان

۳- تعداد کل کلاس‌های مدارس راهنمایی تحصیلی تقسیم بر کل جمعیت ۱۳-۱۱ ساله شهرستان

۴- تعداد کل کلاس‌های دبیرستان‌های متوسطه عمومی تقسیم بر کل جمعیت ۱۷-۱۴ ساله شهرستان

۵- تعداد کل کلاس‌های هنرستان‌های فنی تقسیم بر کل جمعیت ۱۷-۱۴ ساله شهرستان

۶- تعداد کل کلاس‌های مدارس بازرگانی و حرفه‌ای تقسیم بر کل جمعیت ۱۷-۱۴ ساله شهرستان

۷- تعداد کل کلاس‌های مدارس دوره عمومی تقسیم بر کل جمعیت ۱۷-۶ ساله شهرستان

۸- تعداد کل کلاس‌های مدارس دوره تکمیلی تقسیم بر کل جمعیت ۱۷-۶ ساله شهرستان

منابع آماری:

- آمار آموزش و پرورش استان مرکزی (اراک) سال ۶۲-۶۱ اداره کل آموزش و پرورش استان مرکزی (اراک)

- آمار جمعیت لازم‌التعلیم شهرستان‌های کشور برای سال ۱۳۶۲ منتج از سرشماری عمومی ۱۳۵۵ مرکز آمار ایران - مرکز آمار ایران

ماتریس Y_{ij} جدول ۱

(۸)	(۷)	(۶)	(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)	خصوصیت شهرستان
۰/۰۲۱	۰/۰۲۴	۰/۰۳۴	۰/۰۸۸	۰/۸۶۸	۲/۱۶۰	۳/۷۹۳	۰/۰۱۵	اراک
۰	۰/۰۰۶	۰	۰/۰۴۳	۰/۲۲۴	۰/۷۵۹	۳/۶۵۸	۰	سربند
۰	۰	۰/۰۱۸	۰/۱۲۹	۱/۰۱۹	۲/۲۲۲	۵/۴۸۹	۰/۰۱۰	تفرش
۰	۰	۰	۰	۰/۷۶۷	۲/۲۸۰	۵/۵۴۶	۰	آشتیان
۰/۰۲۰	۰/۰۱۰	۰/۰۲۵	۰/۰۶۲	۰/۶۰۸	۱/۷۶۸	۴/۴۳۳	۰/۰۲۷	خمین
۰/۰۱۰	۰/۰۰۸	۰/۰۱۴	۰/۰۹۲	۰/۶۶۵	۰/۰۳۸	۴/۵۱۷	۰/۰۱۳	ساوه
۰/۰۱۸	۰/۰۱۴	۰/۰۱۸	۰/۰۵۰	۰/۴۹۲	۱/۷۰۶	۳/۰۵۰	۰	قم
۰	۰/۰۲۰	۰/۰۳۲	۰/۲۵۸	۱/۲۹۲	۲/۷۰۹	۰/۵۵۰	۰	محلات
۰/۰۴۸	۰/۰۲۴	۰	۰	۱/۱۷۴	۲/۴۴۹	۴/۸۹۳	۰	دلیجان
۰/۱۱۷	۰/۱۰۶	۰/۱۴۱	۰/۷۲۲	۷/۱۰۹	۱۷/۰۹۱	۴۰/۹۲۸	۰/۰۶۵	$\sum_{l=1}^9 Y_{ij}$
۰/۰۱۳	۰/۰۱۲	۰/۰۱۶	۰/۰۸۰	۰/۷۹۰	۱/۸۹۹	۴/۵۴۷	۰/۰۰۷	\bar{y}_j

برای صحت بیشتر همه نسبت‌ها در ۱۰۰ ضرب شده‌اند.

ماتریس X_{IJ} جدول ۲

(۸)	(۷)	(۶)	(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)	خصوصیت شهرستان
۰/۰۰۸	۰/۰۱۲	۰/۰۱۸	۰/۰۰۸	۰/۰۷۸	۰/۲۶۱	-۰/۷۵۴	۰/۰۰۸	اراک
-۰/۰۱۳	-۰/۰۰۶	-۰/۰۱۶	-۰/۰۳۷	-۰/۵۶۶	-۱/۱۴۰	-۰/۸۸۹	-۰/۰۰۷	سربند
-۰/۰۱۳	-۰/۰۱۲	۰/۰۰۲	۰/۰۴۹	۰/۲۲۹	۰/۳۲۳	۰/۹۴۲	۰/۰۰۳	تفرش
-۰/۰۱۳	-۰/۰۱۲	-۰/۰۱۶	-۰/۰۰۸	-۰/۰۲۳	۰/۳۸۱	۰/۹۹۹	-۰/۰۰۷	آشتیان
۰/۰۰۷	-۰/۰۰۲	۰/۰۰۹	-۰/۰۱۸	-۰/۱۸۲	-۰/۱۳۱	-۰/۱۱۵	۰/۰۲۰	خمین
-۰/۰۰۳	-۰/۰۰۴	-۰/۰۰۲	۰/۰۱۲	-۰/۱۲۵	-۰/۸۶۱	-۰/۰۰۳	۰/۰۰۶	ساوه
۰/۰۰۵	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	-۰/۰۳۰	-۰/۲۹۸	-۰/۱۹۳	-۱/۴۹۷	-۰/۰۰۷	قم
-۰/۰۱۲	۰/۰۰۸	۰/۰۱۶	۰/۱۷۸	۰/۵۰۲	۰/۸۱۰	۱/۰۰۳	-۰/۰۰۷	محلات
۰/۰۳۵	۰/۰۱۲	-۰/۰۱۶	-۰/۰۸۰	۰/۳۸۴	۰/۵۵۰	۰/۳۴۶	-۰/۰۰۷	دلیجان

ماتریس (S) واریانس - کواریانس جدول ۳

	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)	(۸)
(۱)	۰/۰۰۰۰۷۵	۰/۰۰۰۸۶۲	-۰/۰۰۰۷۵۸	-۰/۰۰۰۳۰۷	۰/۰۰۰۰۲۷	۰/۰۰۰۰۵۳	-۰/۰۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۱۴
(۲)	۰/۰۰۰۸۶۲	۶/۶۲۵۰۶	۳/۲۲۷۶۸	۱/۷۴۴۲۶	-۰/۱۶۶۴۹	-۰/۰۰۰۶۹۰	-۰/۰۰۱۷۴۷	-۰/۰۰۲۸۸۴
(۳)	-۰/۰۰۰۷۵۸	۳/۲۲۷۶۸	۳/۳۷۱۵۴	۱/۵۳۷۶۰	۰/۱۲۷۶۱	۰/۰۰۲۱۸۰	۰/۰۰۱۷۹۲	۰/۰۰۱۷۱۸
(۴)	-۰/۰۰۰۳۰۷	۱/۷۴۴۲۶	۱/۵۳۷۶۰	۰/۹۱۶۴۲	۰/۱۰۳۹۸	۰/۰۰۱۱۱۹	۰/۰۰۰۶۷۴	۰/۰۰۰۹۸۳
(۵)	۰/۰۰۰۰۲۷	-۰/۱۶۶۴۹	۰/۱۲۷۶۱	۰/۱۰۳۹۸	۰/۰۰۲۹۶۹	۰/۰۰۰۶۰۰	۰/۰۰۰۱۰۸	-۰/۰۰۰۴۴۸
(۶)	۰/۰۰۰۰۵۳	-۰/۰۰۰۶۹۰	۰/۰۰۲۱۸۰	۰/۰۰۱۱۱۹	۰/۰۰۰۶۰۰	۰/۰۰۰۱۴۴	۰/۰۰۰۰۴۱	-۰/۰۰۰۰۱۵
(۷)	-۰/۰۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۱۷۴۷	۰/۰۰۱۷۹۲	۰/۰۰۰۶۷۴	۰/۰۰۰۱۰۸	۰/۰۰۰۰۴۱	۰/۰۰۰۰۷۰	-۰/۰۰۰۰۸۱
(۸)	۰/۰۰۰۰۱۴	-۰/۰۰۲۸۸۴	۰/۰۰۱۷۱۸	۰/۰۰۰۹۸۳	-۰/۰۰۰۴۴۸	-۰/۰۰۰۰۱۵	۰/۰۰۰۰۸۱	۰/۰۰۰۰۲۰۵

بردار انتخابی و دور محاسباتی اول - جدول ۴ $\mu_1 = 1/(1138592)$

w_0		w_1	
w_{01}	۱۰۰۰۰۰	w_{11}	-۳۷
w_{02}	۱۰۰۰۰۰	w_{12}	۱,۱۳۸,۵۹۲
w_{03}	۱۰۰۰۰۰	w_{13}	۸۳۱,۳۷۵
w_{04}	۱۰۰۰۰۰	w_{14}	۴۳۲,۶۹۵
w_{05}	۱۰۰۰۰۰	w_{15}	۴۵,۰۶۴
w_{06}	۱۰۰۰۰۰	w_{16}	۳,۴۳۲
w_{07}	۱۰۰۰۰۰	w_{17}	۱,۰۱۶
w_{08}	۱۰۰۰۰۰	w_{18}	-۳۰۶

دور محاسباتی دوم - جدول ۵ $\mu_2 = 1/(9/63810)$

W ₁		W ₂		R _p
W ₁₁	-۰/۰۰۰۰۳	W ₂₁	۰/۰۰۱۹۳	-۶۴/۳۳۳۳۳
W ₁₂	۱	W ₂₂	۹/۶۳۸۱۰	۹/۶۳۸۱۰
W ₁₃	۰/۷۳۰۱۸	W ₂₃	۶/۲۷۸۹۷	۸/۵۹۹۲۱
W ₁₄	۰/۳۸۰۰۳	W ₂₄	۳/۲۱۹۴۰	۸/۴۷۱۴۳
W ₁₅	۰/۰۳۹۵۸	W ₂₅	-۰/۰۳۱۸۱	-۰/۸۰۳۶۹
W ₁₆	۰/۰۰۳۰۱	W ₂₆	۰/۰۱۳۵۱	۴/۴۸۸۳۷
W ₁₇	۰/۰۰۰۸۹	W ₂₇	-۰/۰۰۱۷۸	-۲/۰۰۰۰۰
W ₁₈	-۰/۰۰۰۲۷	W ₂₈	-۰/۰۱۲۳۴	۴۵/۷۰۳۷۰

دور محاسباتی سوم - جدول ۶ $\mu_3 = 1/(9/31101)$

W ₂		W ₃		R _p
W ₂₁	۰/۰۲۰۰۰	W ₃₁	۰/۰۰۲۶۶	۱۳/۲۸۱۰۵
W ₂₂	۱	W ₃₂	۹/۳۱۱۰۱	۹/۳۱۱۰۱
W ₂₃	۰/۶۵۱۴۷	W ₃₃	۵/۹۳۷۳۳	۹/۱۱۳۷۴
W ₂₄	۰/۳۳۴۰۳	W ₃₄	۳/۰۵۱۷۳	۹/۱۳۶۰۹
W ₂₅	-۰/۰۰۳۳۰	W ₃₅	-۰/۰۴۸۷۷	۱۴/۷۷۹۸۵
W ₂₆	۰/۰۰۱۴۰	W ₃₆	۰/۰۱۱۰۲	۷/۸۷۳۰۰
W ₂₇	-۰/۰۰۰۱۸	W ₃₇	-۰/۰۰۳۵۵	۱۹/۷۱۳۳۳
W ₂₈	-۰/۰۰۱۲۸	W ₃₈	-۰/۰۱۴۳۵	۱۱/۲۱۲۸۱

$\mu_4 = 1/(9/25585)$ دور محاسباتی چهارم - جدول ۷

W_3		W_4		R_p
W_{31}	۰/۰۰۰۲۸	W_{41}	۰/۰۰۲۷۸	۹/۹۲۶۷۵
W_{32}	۱	W_{42}	۹/۲۵۵۸۵	۹/۲۵۵۸۵
W_{33}	۰/۶۳۷۶۷	W_{43}	۵/۸۸۰۸۸	۹/۲۲۲۴۵
W_{34}	۰/۳۲۷۷۵	W_{44}	۳/۰۲۴۵۵	۹/۲۲۸۲۲
W_{35}	-۰/۰۰۵۲۴	W_{45}	-0/05128	9/78708
W_{36}	۰/۰۰۱۱۸	W_{46}	0/01064	9/01627
W_{37}	-۰/۰۰۰۳۸	W_{47}	-0/00384	10/10684
W_{38}	-۰/۰۰۱۵۴	W_{48}	-۰/۰۱۴۶۴	9/50857

$\mu_0 = 1/(9/24677)$ دور محاسباتی پنجم - جدول ۸

W_4		W_5		R_p
W_{41}	0/00030	W_{51}	0/00280	9/3333
W_{42}	۱	W_{52}	9/24677	9/24677
W_{43}	0/63537	W_{53}	5/87158	9/24119
W_{44}	0/32677	W_{54}	3/02008	9/24222
W_{45}	-0/00554	W_{55}	-0/05169	9/33115
W_{46}	0/00115	W_{56}	0/01058	9/19661
W_{47}	-0/00041	W_{57}	-0/00389	9/48488
W_{48}	-0/00158	W_{58}	-0/01469	9/29816

$\mu_0 = 1/(9/24527)$ دور محاسباتی ششم - جدول ۹

W_5		W_6		R_p
W_{51}	0/00030	W_{61}	0/00280	9/34397
W_{52}	۱	W_{62}	۹/۲۴۵۲۷	۹/۲۴۵۲۷
W_{53}	0/63499	W_{63}	5.91229	9/31083
W_{54}	0/32661	W_{64}	3.01934	9/24449
W_{55}	-0/00559	W_{65}	-0.05178	9/26234
W_{56}	0/00114	W_{66}	0/01056	9/26316
W_{57}	-0/00042	W_{67}	-0/00390	9/27809
W_{58}	-0/00159	W_{68}	-0/01470	9/24465

دور محاسباتی هفتم - جدول ۱۰ $\mu_7 = 1/(9/25975)$

W ₆		W ₇		R _p
W ₆₁	0/00030	W ₇₁	0/00277	9/22990
W ₆₂	۱	W ₇₂	۹/۲۵۹۷۵	۹/۲۵۹۷۵
W ₆₃	0/63949	W ₇₃	5/88517	9/20291
W ₆₄	0/32658	W ₇₄	3/02623	9/26644
W ₆₅	-0/00560	W ₇₅	-0/05119	9/14136
W ₆₆	0/00114	W ₇₆	0/01066	9/35386
W ₆₇	-0/00042	W ₇₇	0-/00382	9/08667
W ₆₈	-0/00159	W ₇₈	-0/01462	9/19616

دور محاسباتی هشتم - جدول ۱۱ $\mu_8 = 1/(9/24745)$

W ₇		W ₈		R _p
W ₇₁	0/00030	W ₈₁	0/00280	9/32763
W ₇₂	۱	W ₈₂	9/24745	9/24745
W ₇₃	0/63556	W ₈₃	5/87228	9/23954
W ₇₄	0/32681	W ₈₄	3/02041	9/24210
W ₇₅	-0/00553	W ₈₅	-0/05166	9/34278
W ₇₆	0/00115	W ₈₆	0/01058	9/20078
W ₇₇	-0/00041	W ₈₇	-0/00388	9/47585
W ₇₈	-0/00158	W ₈₈	-0/01469	9/29582

دور محاسباتی نهم - جدول ۱۲ $\mu_9 = 1/(9/24539)$

W ₈		W ₉		R _p
W ₈₁	0/00030	W ₉₁	0/00280	9/33333
W ₈₂	۱	W ₉₂	9/24539	9/24539
W ₈₃	0/63502	W ₉₃	5/87016	9/24406
W ₈₄	0/32662	W ₉₄	3/01941	9/24442
W ₈₅	-0/00559	W ₉₅	-0/05176	9/25891
W ₈₆	0/00114	W ₉₆	0/01057	9/26898
W ₈₇	-0/00042	W ₉₇	-0/00390	9/27663
W ₈₈	-0/00159	W ₉₈	-0/01470	9/24426

دور محاسباتی دهم - جدول ۱۳

W ₉		W ₁₀		R _p
W ₉₁	0/00030	W _{10,1}	0/00280	9/25773
W ₉₂	۱	W _{10,2}	9/24503	9/24503
W ₉₃	0/63493	W _{10,3}	5/86980	9/24479
W ₉₄	0/32658	W _{10,4}	3/01922	9/24497
W ₉₅	-0/00560	W _{10,5}	-0/05177	9/24526
W ₉₆	0/00114	W _{10,6}	0/01056	9/24029
W ₉₇	-0/00042	W _{10,7}	-0/00390	9/24083
W ₉₈	-0/00159	W _{10,8}	-0/01470	9/24545

بردار مؤلفه‌های اصلی Z_i جدول ۱۴

مؤلفه اصلی	شهرستان
۵۰/۳۶۱۲۹	اراک
۳۸/۹۴۷۵۵	سربند
۶۶/۵۸۷۹	تفرش
۶۶/۹۷۱۸۲	آشتیان
۵۳/۱۸۴۲۶	خمین
۴۹/۸۵۵۶۸	ساوه
۳۹/۷۷۹۰۶	قم
۷۱/۰۹۸۹۴	محلات
۶۳/۱۵۴۸۴	دلیجان

شاخص وضعیت آموزشی شهرستان‌های استان مرکزی به ترتیب از محرومترین به برخوردارترین جدول ۱۵

مؤلفه اصلی	شهرستان	ردیف
۳۸/۹۴۷۵۵	سربند	۱
۳۹/۷۷۹۰۶	قم	۲
۴۹/۸۵۵۶۸	ساوه	۳
۵۰/۳۶۱۲۹	اراک	۴
۵۳/۱۸۴۲۶	خمین	۵
۶۳/۱۵۴۸۴	دلیجان	۶
۶۶/۵۸۷۹	تفرش	۷
۶۶/۹۷۱۸۲	آشتیان	۸
۷۱/۰۹۸۹۴	محلات	۹

نمودار شاخص وضعیت آموزشی شهرستان‌های استان مرکزی - نمودار یک

محلات
آشتیان
تفرش
دلیجان
خمین
اراک
ساوه
قم
سربند

منابع و مآخذ

۱- آنالیز تکسونومی (روش طبقه‌بندی گروه‌های همگن) و کاربرد آن در طبقه‌بندی شهرستان‌ها و ایجاد

شاخص‌های توسعه جهت برنامه‌ریزی منطقه‌ای - سازمان برنامه و بودجه استان مرکزی بیژن بیدآباد -

تیرماه ۱۳۶۲

2- Foundation of econometrics, A. Madansky; N.H.C., New York 1976.

3- Applied consumption analysis, L. Philips; N.H.C. New York 1974.

4- Introduction to statistical analysis, W.J. Dixon & F.J.Massey Mc Graw Hill, 1969.

5- Applied multivariate analysis, J.E. Overall & C.J.Klett, New York Mc Craw Hill.

6- Introduction to multivariate analysis for the social sciences J.P. Van de Geer, San Francisco: W.H. Freeman, 1971.

7- Multivariate analysis, M.M. Tatsuoka, New York, Wiley 1971.

8- Multivariate data analysis, W.W. Cooley & P.R. Lohnes New York Wiley 1971.

9- Microeconomic theory, Henderson & Quandt, Mc Graw Hill 1971 Tokyo.

10- Elementary linear algebra, H. Anton, Wiley New York, 1971.

11- Maxima and minima, R. Frisch Reidel Holland, 1960.

12- Factor analysis as a statistical method, D.N. Lawley & A.E. Maxwell, 1971, London, Butterworth.

- 13- Modern factor analysis, H. H. Harman Chicago University press 1960.
- 14- Analysis of survey data, vol. I, exploring data structures, Colm. A. O, Mmuirheartaigh & Clive Payne, Wiley 1978, England.
- 15- Computational matrix algebra, D.I. Steinberg, Mc Graw Hill, 1974.
- 16- Regional Science techniques in practices, Czamanski, Lexington book 1972.
- 17- Econometric methods, J. Johnston, Mc. Graw Hill, 1972.
- 18- Applied numerical methods, Carnahan, Brice, H.A. Luther, &J.O. Wilkes, Wiley , New York, 1969.
- 19- Computer solution of linear algebraic systems, Forsythe, George & Cleve B. Moer, Prentice hall, Englewood, N.J., 1967.
- 20- Matrix theory, Franklin J.N., Prentice hall, Englewood, cliffs N.J., 1968.
- 21- Introduction to numerical analysis, Froberg C.E., Addison Wesley reading Mass. 1969.
- 22- Analysis of numerical methods, Isaacson E.& H. B. Keller Wwiley New York 1966.
- 23- The algebraic eigenvalue problem, Wilkinson J.H., Oxford University press London, 1965.